

ESTUDOS E PROPOSTAS EM (ENSINO DE) MATEMÁTICA

D I F E R E N T E S O L H A R E S

ORGANIZADORES

Laís Maria Costa Pires de Oliveira

Marcos Vinicius de Oliveira Peres

Wellington Piveta Oliveira



ESTUDOS E PROPOSTAS EM (ENSINO DE) MATEMÁTICA

D I F E R E N T E S O L H A R E S

ORGANIZADORES

Laís Maria Costa Pires de Oliveira

Marcos Vinicius de Oliveira Peres

Wellington Piveta Oliveira





2025 - Ampla Editora

Copyright da Edição © Ampla Editora

Copyright do Texto © Os autores

Editor Chefe: Leonardo Tavares

Design da Capa: Ampla Editora

Estudos e propostas em (ensino de) matemática: diferentes olhares está licenciado sob CC BY-NC 4.0.



Essa licença permite que outros remixem, adaptem e desenvolvam seu trabalho para fins não comerciais e, embora os novos trabalhos devam ser creditados e não possam ser usados para fins comerciais, os usuários não precisam licenciar esses trabalhos derivados sob os mesmos termos. O conteúdo da obra e sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores e não representam a posição oficial da Ampla Editora. O download e o compartilhamento da obra são permitidos, desde que os autores sejam reconhecidos. Todos os direitos desta edição foram cedidos à Ampla Editora.

ISBN: 978-65-5381-296-3

DOI: 10.51859/ampla.epm963.1125-0

Ampla Editora
Campina Grande – PB – Brasil
contato@amplaeditora.com.br
www.amplaeditora.com.br



2025

CONSELHO EDITORIAL

Adilson Tadeu Basquerote – Centro Universitário para o Desenvolvimento do Alto Vale do Itajaí

Alexander Josef Sá Tobias da Costa – Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Andréa Cátia Leal Badaró – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Andréia Monique Lermen – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Antoniele Silvana de Melo Souza – Universidade Estadual do Ceará

Aryane de Azevedo Pinheiro – Universidade Federal do Ceará

Bergson Rodrigo Siqueira de Melo – Universidade Estadual do Ceará

Bruna Beatriz da Rocha – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

Bruno Ferreira – Universidade Federal da Bahia

Caio Augusto Martins Aires – Universidade Federal Rural do Semi-Árido

Caio César Costa Santos – Universidade Federal de Sergipe

Carina Alexandra Rondini – Universidade Estadual Paulista

Carla Caroline Alves Carvalho – Universidade Federal de Campina Grande

Carlos Augusto Trojaner – Prefeitura de Venâncio Aires

Carolina Carbonell Demori – Universidade Federal de Pelotas

Caroline Barbosa Vieira – Universidade Estadual do Rio Grande do Sul

Christiano Henrique Rezende – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Cícero Batista do Nascimento Filho – Universidade Federal do Ceará

Clécio Danilo Dias da Silva – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Dandara Scarlet Sousa Gomes Bacelar – Universidade Federal do Piauí

Daniela de Freitas Lima – Universidade Federal de Campina Grande

Darlei Gutierrez Dantas Bernardo Oliveira – Universidade Estadual da Paraíba

Denilson Paulo Souza dos Santos – Universidade Estadual Paulista

Denise Barguil Nepomuceno – Universidade Federal de Minas Gerais

Dinara das Graças Carvalho Costa – Universidade Estadual da Paraíba

Diogo Lopes de Oliveira – Universidade Federal de Campina Grande

Dylan Ávila Alves – Instituto Federal Goiano

Edson Lourenço da Silva – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí

Elane da Silva Barbosa – Universidade Estadual do Ceará

Érica Rios de Carvalho – Universidade Católica do Salvador

Fábio Ronaldo da Silva – Universidade do Estado da Bahia

Fernanda Beatriz Pereira Cavalcanti – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Fredson Pereira da Silva – Universidade Estadual do Ceará

Gabriel Gomes de Oliveira – Universidade Estadual de Campinas

Gilberto de Melo Junior – Instituto Federal do Pará

Givanildo de Oliveira Santos – Instituto Brasileiro de Educação e Cultura

Glécia Morgana da Silva Marinho – Pontifícia Universidad Católica Argentina Santa María de Buenos Aires (UCA)

Higor Costa de Brito – Universidade Federal de Campina Grande

Hugo José Coelho Corrêa de Azevedo – Fundação Oswaldo Cruz

Igor Lima Soares – Universidade Federal do Ceará

Isabel Fontgalland – Universidade Federal de Campina Grande

Isane Vera Karsburg – Universidade do Estado de Mato Grosso

Israel Gondres Torné – Universidade do Estado do Amazonas

Ivo Batista Conde – Universidade Estadual do Ceará

Jaqueline Rocha Borges dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Jessica Wanderley Souza do Nascimento – Instituto de Especialização do Amazonas

João Henriques de Sousa Júnior – Universidade Federal de Santa Catarina

João Manoel Da Silva – Universidade Federal de Alagoas

João Vitor Andrade – Universidade de São Paulo

Joilson Silva de Sousa – Universidade Regional do Cariri

José Cândido Rodrigues Neto – Universidade Estadual da Paraíba

Jose Henrique de Lacerda Furtado – Instituto Federal do Rio de Janeiro

Josenita Luiz da Silva – Faculdade Frassinetti do Recife

Josiney Farias de Araújo – Universidade Federal do Pará

Karina de Araújo Dias – SME/Prefeitura Municipal de Florianópolis

Katia Fernanda Alves Moreira – Universidade Federal de Rondônia

Laís Portugal Rios da Costa Pereira – Universidade Federal de São Carlos

Laíze Lantyer Luz – Universidade Católica do Salvador

Lara Luiza Oliveira Amaral – Universidade Estadual de Campinas

Lindon Johnson Pontes Portela – Universidade Federal do Oeste do Pará

Lisiane Silva das Neves – Universidade Federal do Rio Grande

Lucas Araújo Ferreira – Universidade Federal do Pará

Lucas Capita Quarto – Universidade Federal do Oeste do Pará

Lúcia Magnólia Albuquerque Soares de Camargo – Unifacisa Centro Universitário

Luciana de Jesus Botelho Sodrê dos Santos – Universidade Estadual do Maranhão

Luís Miguel Silva Vieira – Universidade da Madeira

Luís Paulo Souza e Souza – Universidade Federal do Amazonas

Luiza Catarina Sobreira de Souza – Faculdade de Ciências Humanas do Sertão Central

Manoel Mariano Neto da Silva – Universidade Federal de Campina Grande

Marcelo Alves Pereira Eufrazio – Centro Universitário Unifacisa

Marcelo Henrique Torres de Medeiros – Universidade Federal Rural do Semi-Árido

Marcelo Williams Oliveira de Souza – Universidade Federal do Pará

Marcos Pereira dos Santos – Faculdade Rachel de Queiroz

Marcus Vinicius Peralva Santos – Universidade Federal da Bahia

Maria Carolina da Silva Costa – Universidade Federal do Piauí

Maria José de Holanda Leite – Universidade Federal de Alagoas

Marina Magalhães de Moraes – Universidade Federal do Amazonas

Mário Cézar de Oliveira – Universidade Federal de Uberlândia

Michele Antunes – Universidade Feevale

Michele Aparecida Cerqueira Rodrigues – Logos University International

Miguel Ysrael Ramírez-Sánchez – Universidade Autónoma do Estado do México

Milena Roberta Freire da Silva – Universidade Federal de Pernambuco

Nadja Maria Mourão – Universidade do Estado de Minas Gerais

Natan Galves Santana – Universidade Paranaense

Nathalia Bezerra da Silva Ferreira – Universidade do Estado do Rio Grande do Norte

Neide Kazue Sakugawa Shinohara – Universidade Federal Rural de Pernambuco

Neudson Johnson Martinho – Faculdade de Medicina da Universidade Federal de Mato Grosso

Patrícia Appelt – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Paula Milena Melo Casais – Universidade Federal da Bahia

Paulo Henrique Matos de Jesus – Universidade Federal do Maranhão

Rafael Rodrigues Gomides – Faculdade de Quatro Marcos

Ramôn da Silva Santos – Universidade Federal Rural de Pernambuco

Reângela Cíntia Rodrigues de Oliveira Lima – Universidade Federal do Ceará

Rebeca Freitas Ivanicska – Universidade Federal de Lavras

Regina Márcia Soares Cavalcante – Universidade Federal do Piauí

Renan Gustavo Pacheco Soares – Autarquia do Ensino Superior de Garanhuns

Renan Monteiro do Nascimento – Universidade de Brasília

Ricardo Leoni Gonçalves Bastos – Universidade Federal do Ceará

Rodrigo da Rosa Pereira – Universidade Federal do Rio Grande

Rubia Katia Azevedo Montenegro – Universidade Estadual Vale do Acaraú



Sabrynna Brito Oliveira – Universidade Federal de Minas Gerais

Samuel Miranda Mattos – Universidade Estadual do Ceará

Selma Maria da Silva Andrade – Universidade Norte do Paraná

Shirley Santos Nascimento – Universidade Estadual Do Sudoeste Da Bahia

Silvana Carloto Andres – Universidade Federal de Santa Maria

Silvio de Almeida Junior – Universidade de Franca

Tatiana Paschoalette R. Bachur – Universidade Estadual do Ceará | Centro Universitário Christus

Telma Regina Stroparo – Universidade Estadual do Centro-Oeste

Thayla Amorim Santino – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Thiago Sebastião Reis Contarato – Universidade Federal do Rio de Janeiro

Tiago Silveira Machado – Universidade de Pernambuco

Valvenarg Pereira da Silva – Universidade do Estado de Mato Grosso

Vinícius Queiroz Oliveira – Universidade Federal de Uberlândia

Virgínia Maia de Araújo Oliveira – Instituto Federal da Paraíba

Virginia Tomaz Machado – Faculdade Santa Maria de Cajazeiras

Walmir Fernandes Pereira – Miami University of Science and Technology

Wanessa Dunga de Assis – Universidade Federal de Campina Grande

Wellington Alves Silva – Universidade Estadual de Roraima

William Roslindo Paranhos – Universidade Federal de Santa Catarina

Yáscara Maia Araújo de Brito – Universidade Federal de Campina Grande

Yasmin da Silva Santos – Fundação Oswaldo Cruz

Yuciara Barbosa Costa Ferreira – Universidade Federal de Campina Grande



2025 - Ampla Editora

Copyright da Edição © Ampla Editora

Copyright do Texto © Os autores

Editor Chefe: Leonardo Tavares

Design da Capa: Ampla Editora

Catálogo na publicação
Elaborada por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

E82

Estudos e propostas em (ensino de) matemática: diferentes olhares / Organização de Laís Maria Costa Pires de Oliveira, Marcos Vinicius de Oliveira Peres, Wellington Piveta Oliveira; Prefácio de Tânia Marli Rocha Garcia. – Campina Grande/PB: Ampla, 2025.

Livro em PDF

ISBN 978-65-5381-296-3

DOI 10.51859/ampla.epm963.1125-0

1. Ensino de matemática. I. Oliveira, Laís Maria Costa Pires de (Organizadora). II. Peres, Marcos Vinicius de Oliveira (Organizador). III. Oliveira, Wellington Piveta (Organizador). IV. Garcia, Tânia Marli Rocha (Prefácio). V. Título.

CDD 510.7

Índice para catálogo sistemático

I. Ensino de matemática

Ampla Editora
Campina Grande – PB – Brasil
contato@amplaeditora.com.br
www.amplaeditora.com.br



2025



SOBRE OS ORGANIZADORES

Lais Maria Costa Pires de Oliveira

Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (PECEM/UEL). Atualmente é professora colaboradora da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), campus de Paranavaí. E-mail: lais.oliveira@ies.unespar.edu.br.

Marcos Vinicius de Oliveira Peres

Doutor em Ciências pelo Programa de Pós-Graduação em Saúde Pública da Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto, da Universidade de São Paulo (FMRP/USP). Atualmente é professor adjunto da Universidade Estadual de Maringá (UEM), campus sede. E-mail: mvoperes@uem.br.

Wellington Piveta Oliveira

Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (PCM/UEM). Atualmente é professor adjunto da Universidade Federal do Paraná (UFPR), campus Avançado de Jandaia do Sul e do Programa de Pós-graduação em Ensino: Formação Docente Interdisciplinar da Universidade Estadual do Paraná, campus de Paranavaí (PPIFOR/UNESPAR). E-mail: wellington.piveta@ufpr.br.

APRESENTAÇÃO

Este e-book é resultado do empenho e da dedicação de alunos e professores do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná – *Campus* de Paranavaí. Mais do que uma coletânea de trabalhos, ele representa as vivências, reflexões e aprendizagens que foram constituídos ao longo da formação acadêmica de nossos estudantes.

Os textos aqui reunidos nasceram de questionamentos, curiosidades e diálogos constantes, e do desejo de compreender melhor a matemática e suas múltiplas formas de manifestação. Apesar de serem pesquisas iniciais, desenvolvidas no contexto dos Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC), elas introduzem os licenciandos ao universo da produção científica, sendo esse um passo importante tanto para a formação de futuros professores quanto para aqueles que desejam seguir carreira na pesquisa acadêmica.

Nesta coletânea, o leitor encontrará produções que exploram diferentes áreas da Matemática: desde investigações em Educação Matemática até aplicações da Matemática, passando também por temas da Matemática pura. Essa diversidade reflete não apenas os interesses dos autores, mas também o compromisso do curso em promover uma formação ampla, crítica e conectada com a realidade.

A construção deste material exigiu tempo, esforço e, acima de tudo, persistência. Foram muitas etapas: estudos, revisões, conversas, considerações e reconsiderações... Durante esse percurso, histórias foram vividas, laços foram criados e muito aprendizado aconteceu. Nem todos os trabalhos desenvolvidos estão aqui, alguns já ganharam espaço em eventos e revistas científicas, mas todos que compõem este volume refletem o compromisso com a formação inicial de professores e o desejo de contribuir com uma educação com vistas à promoção de equidade e justiça social.

A todos os estudantes e professores que participaram deste processo, vale deixar aqui uma sincera gratidão. Sem o envolvimento e a colaboração de cada um, esta coletânea não teria se concretizado. Que ela sirva de inspiração para novas histórias de pesquisa, ensino e descobertas.

PREFÁCIO

Os estudos apresentados neste livro foram realizados no contexto do Curso de Licenciatura em Matemática da Unespar – *Campus* Paranavaí, em ações formativas fundamentais para a formação e o desenvolvimento dos futuros professores.

Não são poucos os desafios do trabalho docente e da realidade complexa de uma sala de aula no cenário educacional. Igualmente desafiador é o trabalho de formação de profissionais para atuar nesse cenário de forma ética e competente.

A formação inicial de professores que ensinam matemática envolve a trajetória dos futuros professores antes, durante e depois do curso de licenciatura. É um processo de aprendizagem e apropriação de uma cultura profissional (conhecimentos, crenças, valores) e do desenvolvimento de identidade profissional de professor.

É, ainda, um processo de interpretação e reinterpretação das experiências sociais e biográficas que o futuro professor vivencia na interação social, histórica e cultural, que não envolve somente a pessoa (como indivíduo) do futuro professor, mas também as pessoas e contextos com os quais se relaciona, e pode ser visto como um processo de aprendizagem de ser professor.

O curso de licenciatura é um período de apropriação de conhecimentos profissionais essenciais ao trabalho docente: conhecimento do conteúdo do ensino e da ciência Matemática; conhecimento do processo de ensino de Matemática; conhecimento dos alunos e do processo de aprendizagem em Matemática; conhecimento da estrutura curricular e dos contextos e fins da educação (Shulman, 1987¹).

É também um período fundamental para a construção da identidade profissional dos futuros professores de matemática, que se refere

[...] ao eu profissional que [futuros professores] constroem e reconstróem tornando-se e sendo professores. Ela inclui suas apropriações dos valores e normas da profissão; suas principais crenças sobre o ensino e sobre si mesmos como professores; uma visão do que significa ser um "excelente professor" e do tipo de professor que querem ser; um entendimento de si mesmo como um aprendiz e uma capacidade de refletir sobre a experiência. (Ponte; Chapman, 2008, p. 242)².

¹ SHULMAN, Lee S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington, v. 15, n. 2, 1987. p. 4-14.

² PONTE, J., CHAPMAN, O. Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In: LYN, D. English (Ed.). **Handbook of international research in mathematics education**. 2. ed. New York: Routledge, 2008. p. 225-263.



Os capítulos que compõem este livro apresentam estudos realizados pelos futuros professores e seus orientadores em ações como projetos de ensino, pesquisa e extensão; estágio supervisionado; trabalhos de conclusão de curso que possibilitaram o acesso, produção e disseminação de diversas formas do conhecimento científico nos campos da Matemática Pura e Aplicada, da Educação Matemática, e de áreas interrelacionadas, como a Estatística.

Os capítulos fundamentados na Educação Matemática (capítulos 01 a 06) abordam práticas pedagógicas, recursos e estratégias para o ensino de matemática na Educação Básica, com potencial para promover aprendizagens e construção significativa do conhecimento matemático. Os capítulos fundamentados nas áreas de Matemática Pura, Matemática Aplicada e na Estatística (capítulos 07 a 11) exploram conceitos e estruturas matemáticas de natureza teórica, e algumas conexões com ideias matemáticas presentes em objetos e situações do mundo real.

Cada capítulo evidencia uma árdua trajetória de estudos, permeada por dúvidas, incertezas, questionamentos e aprendizagens, bem como o empenho dos autores em estabelecer conexões e articular saberes científicos, saberes da experiência e da tradição pedagógica, em um processo de aprendizagem e apropriação de uma cultura profissional (conhecimentos, crenças, valores) e desenvolvimento de identidade profissional de professor. São vivências que apesar das dificuldades e esforços, promovem aprendizagens únicas para todos os envolvidos.

Merece destaque o empenho dos organizadores na divulgação de tais estudos, fundamental para inspirar outros futuros professores e demais formadores a participarem de experiências dessa natureza, ampliando o conhecimento já produzido, contestando ideias, criando visões, trazendo outras perspectivas para potencializar o desenvolvimento e identidade profissional de novos professores, com o compromisso e a coragem necessários para lidar com os desafios da profissão docente.

Tânia Marli Rocha Garcia

SUMÁRIO

CAPÍTULO I. CONCEITOS RELACIONADOS À FUNÇÃO EXPONENCIAL EM UMA TAREFA EXPLORATÓRIA.....	14
RESUMO.....	14
1 INTRODUÇÃO.....	15
2 Tarefas matemáticas em aulas assentes no Ensino Exploratório de Matemática.....	17
2.1 <i>Conceitos relacionados à Função Exponencial</i>	19
3 O CONTEXTO DE ESTUDO E A TAREFA PROPOSTA.....	22
4 RESULTADOS.....	24
4.1 <i>Percepção da regularidade para o cálculo do valor do investimento após meses de aplicação no item 1</i>	24
4.2 <i>A representação gráfica do investimento no decorrer do tempo no Item 3</i>	26
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	28
REFERÊNCIAS.....	29
CAPÍTULO II. ADAPTAÇÃO DE QUESTÕES DO ENEM (2022) SOBRE FUNÇÃO QUADRÁTICA PARA O TRABALHO NO ENSINO EXPLORATÓRIO	31
RESUMO.....	31
1 INTRODUÇÃO.....	32
2 TAREFAS EXPLORATÓRIAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA	33
3 ASPECTOS METODOLÓGICOS	38
4 ADAPTAÇÕES DE QUESTÕES DO ENEM PARA AULAS NO EEM	40
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	46
REFERÊNCIAS.....	47
CAPÍTULO III. A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DO ESTUDO DO CONE EM DOIS CONTEXTOS: O LIVRO DIDÁTICO E A MODELAGEM MATEMÁTICA	49
RESUMO.....	49
1 INTRODUÇÃO.....	50
2 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA E SEUS ATRIBUTOS.....	51
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	54
4 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DO ESTUDO DO CONE NO LIVRO DIDÁTICO 55	
5 ANÁLISE DO PLANEJAMENTO DA PRÁTICA DE MODELAGEM MATEMÁTICA: QUANTO SORVETE CABE EM UMA CASQUINHA?	59
6 ANÁLISE GERAL DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA	63
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	64
REFERÊNCIAS.....	65
CAPÍTULO IV. MODELAGEM MATEMÁTICA E BEM-ESTAR DIGITAL: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE ESTATÍSTICA	67
RESUMO.....	67
1 INTRODUÇÃO.....	68
2 BEM-ESTAR DIGITAL.....	69
3 MODELAGEM MATEMÁTICA.....	70
4 INTRODUÇÃO À ESTATÍSTICA – MÉDIA MODA E MEDIANA.....	71
5 METODOLOGIA	74
5.1 <i>Etapas da sequência didática</i>	74
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	84
REFERÊNCIAS.....	85

CAPÍTULO V. A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO PROMOTORA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA NO ENSINO MÉDIO.....	86
RESUMO.....	86
1 INTRODUÇÃO.....	87
2 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	88
3 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA.....	90
4 MODELAGEM MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA.....	92
5 DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA.....	94
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	106
REFERÊNCIAS.....	107
CAPÍTULO VI. UMA PROPOSTA DE ENSINO DE TRIGONOMETRIA COM O SOFTWARE SCRATCH	109
RESUMO.....	109
1 INTRODUÇÃO.....	109
2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	111
2.1 <i>Um pouco sobre triângulos</i>	111
2.2 <i>A lei dos cossenos</i>	113
2.3 <i>A fórmula de Heron</i>	114
2.4 <i>Funções trigonométricas inversas (arco seno e arco cosseno)</i>	114
2.5 <i>O Scratch</i>	115
3 PERCURSO METODOLÓGICO.....	118
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	124
REFERÊNCIAS.....	125
CAPÍTULO VII. UMA INTRODUÇÃO AOS QUADRADOS LATINOS.....	127
RESUMO.....	127
1 INTRODUÇÃO.....	127
2 QUADRADOS LATINOS.....	128
3 QUASEGRUPOS.....	131
4 ORTOGONALIDADE ENTRE QUADRADOS LATINOS.....	134
5 CONSTRUÇÃO DE NOVOS QUADRADOS LATINOS A PARTIR DE QUADRADOS LATINOS EXISTENTES.....	138
6 QUADRADOS LATINOS MUTUAMENTE ORTOGONAIS.....	140
7 INTEGRAÇÃO DA TEORIA DOS QUADRADOS LATINOS NO JOGO SUDOKU 144	
7.1 <i>Similaridades Estruturais</i>	145
7.2 <i>Quadrados Latinos e as Regras do Sudoku</i>	145
7.3 <i>Implicações para Pesquisa e Ensino</i>	145
8 CONCLUSÃO.....	146
REFERÊNCIAS.....	147
CAPÍTULO VIII. UM ESTUDO DE OPERADORES DIAGONALIZÁVEIS E UMA INTRODUÇÃO À FORMA CANÔNICA DE JORDAN	148
RESUMO.....	148
1 INTRODUÇÃO.....	148
2 OPERADORES DIAGONALIZÁVEIS.....	149
2.1 <i>Autovalores e autovetores</i>	150
2.2 <i>Polinômio característico</i>	152
3 FERRAMENTAS.....	156

3.1	<i>Soma direta de espaços vetoriais</i>	156
3.2	<i>Subespaços T-invariantes</i>	157
3.3	<i>Polinômio minimal e o Teorema de Cayley-Hamilton</i>	159
3.4	<i>Operadores nilpotentes</i>	161
4	FORMA CANÔNICA DE JORDAN	162
5	CONCLUSÕES	168
	REFERÊNCIAS.....	168

CAPÍTULO IX. ESTUDO DA PRODUÇÃO DE CULTIVARES DE CEBOLA USANDO MODELOS MISTOS: ABORDAGEM COM ÊNFASE NO AMBIENTE ESTATÍSTICO R.. 169

	RESUMO.....	169
1	INTRODUÇÃO	170
2	MATERIAIS E MÉTODOS	171
2.1	<i>Materiais</i>	171
2.2	<i>Métodos</i>	172
2.3	<i>Método para estimação dos parâmetros</i>	174
2.4	<i>Verificação dos Pressupostos do Modelo</i>	175
2.5	<i>Identificação de outliers</i>	176
2.6	<i>História do software R</i>	176
3	ANÁLISES E RESULTADOS	178
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	188
	REFERÊNCIAS.....	189

CAPÍTULO X. O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON E APLICAÇÕES NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES 190

	RESUMO.....	190
1	INTRODUÇÃO	191
2	MATERIAIS E MÉTODOS	192
2.1	<i>Breve contexto histórico</i>	192
2.2	<i>Dedução do Método de Newton-Raphson</i>	193
2.3	<i>Erro e critério de parada do método de Newton-Raphson</i>	196
2.4	<i>Quando o método de Newton-Raphson não é eficiente</i>	197
2.5	<i>Código em R</i>	199
3	APLICAÇÕES E RESULTADOS.....	201
3.1	<i>Aplicação 1: Engenharia Mecânica</i>	201
3.2	<i>Aplicação 2: Engenharia Agrícola</i>	203
3.3	<i>Aplicação 3: Engenharia Civil</i>	205
3.4	<i>Aplicação 4: Matemática</i>	206
3.5	<i>Aplicação 5: Finanças</i>	207
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	209
	REFERÊNCIAS.....	209

CAPÍTULO XI. PROBLEMAS LINEARES E ALGUMAS SOLUÇÕES..... 211

	RESUMO.....	211
1	INTRODUÇÃO	212
2	MÉTODOS E SOLUÇÕES	213
3	CONCLUSÕES	225
	REFERÊNCIAS.....	226

CAPÍTULO I

CONCEITOS RELACIONADOS À FUNÇÃO EXPONENCIAL EM UMA TAREFA EXPLORATÓRIA

DOI: 10.51859/ampla.epm963.1125-1

Eduardo dos Santos Zdepski
zdepskieduardo@gmail.com

Laís Maria Costa Pires de Oliveira
lais.oliveira@ies.unespar.edu.br

Wilian Barbosa Travassos
wilian.travassos@uenp.edu.br

Marcos Vinicius de Oliveira Peres
mvoperes@uem.br

RESUMO

Este estudo tem como objetivo discutir conceitos relacionados à função exponencial que foram mobilizados por futuros professores na resolução e discussão de uma tarefa de natureza exploratória. Para tanto, a tarefa denominada “Investimentos” foi adaptada pelos autores e proposta a uma turma do 1º ano de um curso de Licenciatura em Matemática, sendo desenvolvida em aulas assentes no Ensino Exploratório da Matemática (EEM). As informações analisadas foram recolhidas no decorrer do desenvolvimento das aulas, a partir dos registros escritos dos futuros professores. Os resultados mostram que com a proposição desta tarefa na perspectiva do EEM, os futuros professores mobilizaram conceitos relacionados à função exponencial como as grandezas variáveis, a relação de dependência entre elas, a regularidade com que se relacionavam, e o estabelecimento de uma correspondência entre as variáveis. No entanto, a resolução e discussão da tarefa evidenciaram insegurança e (des)conhecimentos matemáticos, o que leva considerar a urgência em criar espaços formativos que promovam a problematização e a construção coletiva de significados matemáticos, o que contribui com a formação profissional desses indivíduos.

Palavras-chave: Formação Inicial de Professores. Ensino Exploratório de Matemática.

1 INTRODUÇÃO

O conceito de função tem grande importância na matemática e em outras áreas do conhecimento, pois permite descrever de forma coesa as relações entre grandezas variáveis. Essa noção é essencial para o estudo quantitativo das variações e contribui significativamente para a construção e análise de modelos descritivos dos fenômenos, dentro e fora do contexto matemático.

Apesar da ampla aplicabilidade no estudo de fenômenos diversos, comumente, os estudos escolares acerca do conceito de função, de modo geral, são desenvolvidos de maneira formal e estática, com foco em aspectos procedimentais, enfatizando ideias abstratas por meio de uma linguagem matemática truncada, muitas vezes, com objetivos em si mesma e com pouca possibilidade para construção de significados (Zuffi; Pacca, 2000). Esse tratamento, reforçado muitas vezes na resolução repetida de exercícios de fixação de conteúdo, distancia os alunos da ideia intuitiva de função como correspondência, transformação, dependência ou resultado de um movimento (Caraça, 1951; Lima *et al.*, 2012).

Documentos normativos da Educação Básica, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), evidenciam nas competências específicas da componente curricular Matemática, aspectos que se alinham às potencialidades do conceito de função, como a relevância de os alunos utilizarem-no “[...] para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente” (p. 531). O documento ainda pontua que a compreensão do conceito de função pelos alunos possibilita o desenvolvimento de habilidades como a de interpretar criticamente situações diversas envolvendo variação de grandezas, por meio da análise dos gráficos de funções, com ou sem apoio de tecnologias digitais (Brasil, 2018).

Especificamente quanto às funções exponenciais e logarítmicas, trabalhadas no Ensino Médio, ambas podem ser exploradas

[...] para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras (Brasil, 2002, p. 121).

Quanto às habilidades concernentes ao trabalho com essas funções matemáticas, a BNCC destaca a interpretação e a comparação de situações que envolvam juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento exponencial das grandezas; a resolução e elaboração de problemas com funções exponenciais que

demandem compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos que envolvam, por exemplo, Matemática Financeira; a análise, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponenciais e logarítmicas por meio de tabelas, do plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada uma das funções.

De modo a possibilitar a aprendizagem dos alunos acerca do conceito de função exponencial, contemplando habilidades consideradas pela BNCC, por meio de um trabalho autônomo, com tarefas que evidenciem a dinamicidade desse conceito e exijam dos alunos mais que a memorização e reprodução de fórmulas e de comandos previamente estudados, é importante que o professor considere cuidadosamente as tarefas que propõe em aula. Nesse sentido, a escolha, adaptação ou elaboração de uma tarefa ambiciosa (Rossa; Estevam, 2022) é importante, pois cada tarefa matemática traz implícita determinada oportunidade de aprendizagem, e ao selecioná-la é necessário que o professor antecipe como explorar suas potencialidades com os alunos e se prepare para a complexidade das demandas decorrentes do trabalho com a tarefa em sala de aula (Stein *et al.*, 2008).

A perspectiva do Ensino Exploratório da Matemática (EEM) (Canavarro, 2011; Oliveira; Canavarro; Menezes, 2013; Cyrino, 2016), alternativa ao ensino diretivo, mostra-se potencial para o desenvolvimento de trabalhos com o conceito de função exponencial por meio de tarefas ambiciosas, possibilitando ao aluno negociar e produzir significado para os conhecimentos matemáticos subjacentes a ela, e simultaneamente, desenvolver capacidades matemáticas como a de resolução de problemas, de raciocínio matemático e de comunicação matemática.

A partir destas considerações, buscamos discutir conceitos relacionados à função exponencial que foram mobilizados por futuros professores ao resolverem uma tarefa de natureza exploratória. A tarefa, adaptada de Caberlini (2018), foi proposta para uma turma de futuros professores, regularmente matriculados na disciplina de Tecnologias de Informação e Comunicação Aplicadas à Matemática, da 1ª série do Curso de Licenciatura em Matemática, de uma universidade pública do estado do Paraná. As aulas foram organizadas e desenvolvidas pelo primeiro autor deste texto com o apoio da segunda autora, professora responsável pela referida disciplina.

Nas próximas seções apresentamos aspectos teóricos a respeito de tarefas exploratórias e conceitos relacionados às funções exponenciais; aspectos metodológicos do trabalho, com a indicação do contexto da pesquisa e dos procedimentos de análise dos dados produzidos; as

análises de registros escritos referentes às resoluções para a tarefa e, por fim, as considerações finais.

2 TAREFAS MATEMÁTICAS EM AULAS ASSENTES NO ENSINO EXPLORATÓRIO DE MATEMÁTICA

Aulas de matemática usuais, pautadas em um processo de ensino sem contextualização, procedimental e de caráter memorístico, comumente são desenvolvidas em dois momentos característicos bem distintos, no primeiro deles o professor apresenta aos alunos técnicas, propriedades e/ou conceitos matemáticos teóricos até então não estudados, e, na sequência, os alunos trabalham com exercícios de fixação do conteúdo, tendo como ponto de partida um exemplo ou modelo resolvido em conjunto com o professor (ou apenas por ele), visando à memorização e reprodução do que foi trabalhado anteriormente.

Com relação ao trabalho com o conceito de função exponencial, Correia e Cazorla (2021) apontam que, comumente, em aulas de matemática no Ensino Médio e nos materiais de apoio ao professor, como os livros didáticos, a introdução ao conceito de função exponencial é feita por meio de sua definição e características algébricas, sem contextualização e com ênfase na resolução de sequências de exercícios dos livros didáticos.

Para que seja possível aos alunos desenvolverem sua autonomia, seu senso crítico, a capacidade de comunicar ideias matemáticas, de elaborar e de refutar hipóteses, assumindo um papel ativo nas aulas de matemática, é preciso que as tarefas exijam deles mais que a memorização e a reprodução correta de conceitos e de fórmulas. De modo que o aluno seja chamado para o centro da atividade de fazer matemática em sala de aula, é preciso que o professor seja cauteloso na escolha, adaptação ou elaboração de tarefas e que assuma uma perspectiva de ensino e de aprendizagem concernente.

Uma possibilidade é a organização e o desenvolvimento de aulas assentes na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática (EEM) (Canavarro, 2011; Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013; Cyrino; Oliveira, 2016), em que a aprendizagem dos alunos acontece a partir de seu engajamento no trabalho com tarefas significativas e da reflexão que fazem acerca deste trabalho (Canavarro, 2011; Ponte, 2014). Essas tarefas visam introduzir/aprofundar conceitos, ideias temas ou procedimentos matemáticos e podem ser caracterizadas como problemas, investigações ou explorações, e devem, sobretudo, desafiar os alunos, partindo de situações concretas (matemáticas ou não), que lhes façam sentido.

Uma aula no EEM é geralmente estruturada em fases (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013; Cyrino; Teixeira, 2016), quais sejam: *a proposição da tarefa*, momento em que o

professor apresenta a tarefa aos alunos assegurando que eles compreendam o que lhes é solicitado e que se sintam seguros para resolvê-la; *o desenvolvimento da tarefa*, em que os alunos, organizados em pequenos grupos, iniciam um trabalho colaborativo para resolver a tarefa, com o apoio do professor, de onde advêm diversas e diferentes resoluções para a tarefa que serão o fio condutor da fase subsequente; *a discussão coletiva da tarefa*, fase em que o professor seleciona e sequencia resoluções dos alunos, de acordo com critérios previamente estabelecidos, com o intuito de promover discussões matematicamente relevantes a partir das estratégias compartilhadas e *a sistematização das aprendizagens* em que ocorre a apresentação formal e a explicação dos conceitos e ideias que a tarefa contempla, a partir da discussão coletiva.

Para que uma aula no EEM se desenvolva de maneira próxima a cada uma dessas etapas é essencial que o professor antecipe toda a dinâmica de trabalho considerando, sobretudo, a seleção, adaptação ou elaboração de tarefa(s), as quais devem constituir propostas instigadoras; apresentar um contexto significativo e nível de complexidade adequado aos alunos; possibilitar resoluções envolvendo formas complexas de pensamento manifestadas por meio de diferentes estratégias, procedimentos e representações; destacar aspectos-chave relacionados ao conceito, procedimento ou à ideia matemática envolvida; promover o raciocínio indutivo (além do dedutivo) e estar articulada com os objetivos da aula, com as orientações curriculares, com as normas da sala e com a prática do professor (Rossa; Estevam, 2022).

Nesse sentido, a seleção da tarefa é importante, mas, por si só não garante o aprendizado dos alunos. Cabe ao professor explorar as potencialidades das tarefas junto aos alunos e se preparar de antemão para lidar com a complexidade dessa exploração em sala de aula. As tarefas podem ser problemas, investigações ou explorações, mas, independentemente da escolha do professor, elas devem desafiar os alunos, partindo de situações concretas (matemáticas ou não), que lhes façam sentido.

Diferentes tarefas possuem diferentes oportunidades de aprendizagem. Por isso, cada tarefa deve ser escolhida no sentido de encaminhar o aluno a desenvolver formas de raciocínio e estratégias que o permitam ultrapassar a simples memorização de conceitos, ideias ou procedimentos matemáticos.

Segundo Ponte (2005), existem diversos tipos de tarefas, que podem ser caracterizadas de acordo com a sua natureza:

- *Natureza fechada*, trata-se de exercícios e problemas, são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados.

- Natureza *acessível*, trata-se de explorações e exercícios, possibilitam aos alunos um elevado grau de sucesso, o que contribui para o desenvolvimento da sua autoconfiança.
- Natureza *desafiante*, trata-se de investigações e problemas, são indispensáveis para que os alunos tenham uma efetiva experiência matemática.

Nesse sentido, ao selecionarmos tarefas exploratórias, devemos considerar a natureza *acessível*, capaz de proporcionar oportunidades importantes de aprendizagem, favorecendo a negociação de significados, a construção de conceitos e a aprendizagem de representações.

2.1 Conceitos relacionados à Função Exponencial

O conceito de função assume grande importância na matemática e em outras áreas do conhecimento, pois permite descrever de forma coesa as relações entre grandezas variáveis. Essa noção é essencial para o estudo quantitativo das variações e contribui significativamente para a construção e análise de modelos descritivos dos fenômenos, dentro e fora do contexto matemático. Este conceito pode ser caracterizado como primário, por ser definido a partir somente de noções intuitivas de relação, univocidade e conjunto; central e estruturante, pois fundamenta grande parte das áreas de conhecimento; e articulador, por ser um elo capaz de conectar e articular a Matemática internamente bem como a Matemática com as outras áreas de conhecimento.

Nesse sentido, uma das potencialidades do conceito de função reside em sua mobilidade, na possibilidade de, enquanto instrumental matemático quantitativo, apreender e expressar as características qualitativas de *interdependência* e de *fluência* intrínsecas a fenômenos da realidade (observável ou imaginável) dos indivíduos (Caraça, 1951).

O estudo escolar de funções, em diferentes níveis de ensino, deve abarcar a produção de significado para o conceito matemático de função (como instrumento matemático necessário à análise quantitativa de fenômenos que envolvem variação), para as várias ideias que o circundam (variável, dependência, conjunto, domínio, imagem, gráficos, equações, expressões analíticas, tabelas) e promover a compreensão das diversas situações problemas que possam estar relacionadas a este conceito (proporcionalidade, raízes da função, correspondência, etc.) (Brasil, 2018; Rezende; Nogueira, 2018).

Segundo Caraça (1951) conceitos como variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização são conceitos-base, essenciais para a compreensão do conceito de função, bem como, o conceito de funções exponenciais.

Uma *variável* é a representação simbólica de um determinado elemento de um conjunto, por exemplo: “Seja (E) um conjunto numérico, e convenhamos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por exemplo: x . A este símbolo representativo de qualquer um dos elementos do conjunto (E) chamamos de variável.” (Caraça, 1951, p. 127). Compreender o conceito de variável não é algo simples, isso porque a variável *representa simultaneamente todos os elementos de um conjunto*, ao mesmo tempo em que representa *cada um dos elementos deste conjunto*, isto é, a variável é e não é, especificamente, um número deste conjunto.

A *dependência* consistente na relação unívoca entre grandezas variáveis, que caracterizará uma função. Seja x uma variável de um conjunto e y uma variável de outro conjunto, a lei de formação de uma função consiste na existência de uma correspondência unívoca entre x e y , logo, $x \rightarrow y$, e y (variável dependente) é função de x (variável independente), o que podemos denotar como $y = f(x)$. Uma função exponencial é dada pela relação $f(x) = a^x$, em que a variável y depende univocamente da variável independente x . Sendo definida por uma potência em que x aparece como expoente, e a base a é um número real positivo, diferente de 1.

A *correspondência* consiste em atribuir a um elemento de um conjunto (antecedente) a um elemento de outro conjunto (consequente). No caso das funções essa correspondência é unívoca. Uma função exponencial, cujo domínio é o conjunto dos números reais, e o contradomínio é o conjunto dos números reais positivos não nulos, é um instrumento matemático cuja essência é a correspondência $f: R \rightarrow R_+$, ou seja, cada elemento do domínio R corresponde a um único elemento do contradomínio R_+ .

A *regularidade* corresponde ao comportamento de condições iniciais assumidas, e que se mantém idêntico, um padrão que, ao ser identificado, possibilita previsões quanto aos fenômenos estudados. Uma regularidade que apresenta comportamento exponencial é o crescimento de uma colônia de bactérias, que tem como processo de reprodução a mitose, em que cada célula se divide em duas, duplicando sempre a quantidade anterior de células existentes.

A *generalização* é concebida a partir do reconhecimento da existência de uma regularidade em uma situação analisada, submetendo-a à abstração, comumente registrada em linguagem algébrica, como equações em sua forma analítica. Para o processo de generalização as variáveis já foram identificadas, a relação de dependências entre elas já foi evidenciada por conta de uma regularidade já observada. Recorrendo à situação anterior, referente ao

crescimento de uma colônia de bactérias, a regularidade observada poderia ser generalizada, como 2^x .

Quanto a especificidades das funções exponenciais, cabe apresentar seu registro analítico, $f: R \rightarrow R_+$ dada por $f(x) = a^x$ com $a \in R, a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada função exponencial da base a , de modo que:

- Se $a < 0$, então $f(x) = a^x$ não estaria definida para todo x real.
- Se $a = 1$, então $f(x) = a^x$ é uma função constante, pois $f(x) = 1^x \rightarrow f(x) = 1$, para todo $x \in R$.
- Se $a = 0$ e $x < 0$, a^x não está definida em R .
- Se $a = 0$ e $x > 0$, f é uma função constante igual a 0.

O registro gráfico de uma função exponencial, representado em um plano cartesiano, pode ser crescente ou decrescente, de acordo com as características assumidas pela base a :

1º caso:

Se $a > 1$, a função é crescente.

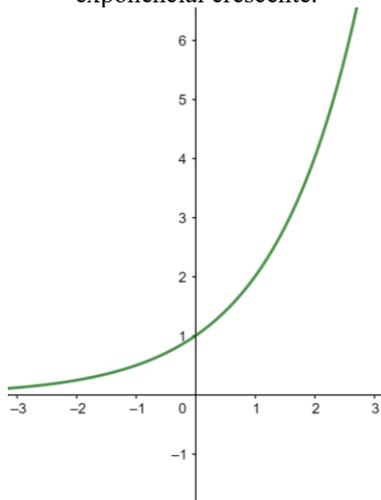
2º caso:

Se $0 < a < 1$, a função é decrescente.

Por exemplo, $f(x) = 2^x$, tem como representação gráfica:

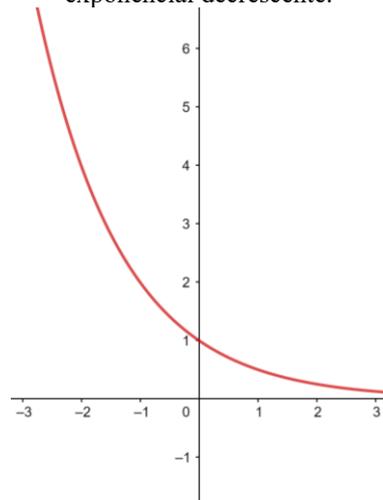
Por exemplo, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, tem como representação gráfica:

Figura 1 - Representação gráfica de uma função exponencial crescente.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 2 - Representação gráfica de uma função exponencial decrescente.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Assim, podemos afirmar, como é fundamental que os conceitos associados às funções exponenciais sejam abordados em sala de aula por meio de tarefas desafiadoras, que incentivem

os alunos a se envolverem ativamente no processo de construção de significados. No caso específico do ensino de funções exponenciais, tais tarefas se mostram particularmente eficazes, uma vez que permitem aos estudantes vivenciarem a função não apenas como um objeto algébrico abstrato, mas como uma ferramenta para compreender e modelar fenômenos variados, aproximando a aprendizagem matemática do cotidiano e das situações reais. Assim, a escolha cuidadosa de tarefas exploratórias e a mediação intencional do professor são elementos fundamentais para potencializar a construção de significados e favorecer a apropriação conceitual pelos alunos, superando práticas tradicionais que limitam a aprendizagem ao domínio mecânico de procedimentos.

3 O CONTEXTO DE ESTUDO E A TAREFA PROPOSTA

O estudo desenvolvido consistiu na discussão de conceitos relacionados à função exponencial, mobilizados por futuros professores na resolução de uma tarefa exploratória. A tarefa foi proposta para uma turma da 1ª série de um curso de Licenciatura em Matemática, em uma dinâmica de trabalho assente na perspectiva do EEM. As informações analisadas se referem a registros escritos de alguns alunos referentes à resolução da tarefa feitos por eles.

A opção por propor a tarefa aos futuros professores regularmente matriculados na disciplina de Tecnologias de Informação e Comunicação Aplicadas à Matemática, do 1º ano da licenciatura levou em conta dois aspectos. O primeiro deles era que os futuros professores ainda não haviam realizado estudos acerca dos diferentes tipos de funções na licenciatura. Assim para a resolução da tarefa possivelmente mobilizariam conhecimentos constituídos no Ensino Médio. O segundo aspecto foi o de a turma já ter vivenciado aulas na perspectiva do EEM com a professora responsável pela disciplina, e a possibilidade de utilizar o software *GeoGebra* como apoio para a resolução da tarefa, um software já explorado pelos futuros professores em momentos anteriores, na referida disciplina.

A tarefa intitulada “*Investimentos*” (Quadro 1), adaptada de um produto educacional do Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE)³, apresentava potencial para promover o desenvolvimento de habilidades consideradas importantes para a constituição e a compreensão do conceito de função exponencial segundo a BNCC (Brasil, 2018), habilidades estas que já seriam esperadas de futuros professores, como: compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis; compreender e estabelecer relações, com ou sem o

³ O Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE) é uma política pública de formação em serviço do estado do Paraná, que visa a proporcionar, aos professores da rede pública estadual, subsídios teórico-metodológicos para o desenvolvimento de ações educacionais sistematizadas e que resultem no redimensionamento de sua prática.

apoio de tecnologias digitais, entre suas representações numérica (tabular), analítica e gráfica (plano cartesiano) para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) da função.

A tarefa “*Investimentos*” fazia alusão à Matemática Financeira (Quadro 1), em um contexto acessível aos futuros professores e que comumente é considerado no trabalho com funções exponenciais no Ensino Médio.

Quadro 1: Tarefa exploratória proposta à turma

Tarefa: Investimentos
<p>Um banco oferece diversos tipos de investimentos aos seus clientes, como caderneta de poupança, títulos de renda fixa, ações. Ana é cliente desse banco e deseja investir a quantia de R\$ 18.000,00 em uma aplicação que pode render em média 3 % ao mês, se o dinheiro ficar aplicado, sem movimentação, por um período superior a 12 meses.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Ao final de 6 meses, qual será o saldo de Ana? Justifique sua resposta. 2) Com base nos cálculos efetuados, faça uma estimativa do saldo da aplicação após 12 meses. Explique como você pensou. 3) Com as informações dos cálculos anteriores, construa um gráfico que represente a evolução do investimento de Ana, ao longo do tempo. Observe e registre as características deste gráfico. 4) Para ter certeza do resultado do investimento a longo prazo, Ana resolveu escrever uma expressão matemática que possibilite encontrar o saldo da aplicação em qualquer mês. Como pode ser essa expressão matemática? Explique seu raciocínio.

Fonte: Adaptada de Caberlini (2018).

De modo geral, esta tarefa trabalhada em aulas na perspectiva do EEM, permite ao aluno: compreender o cálculo e os conceitos de juros compostos; estabelecer a relação entre duas variáveis e construir a representação gráfica de uma função exponencial.

O trabalho com a tarefa foi realizado uma vez por semana, em aulas geminadas, ministradas pelo primeiro autor do trabalho, com o apoio da segunda autora. Ao todo, seis aulas foram utilizadas em três semanas consecutivas. Para a organização e desenvolvimento das aulas, na perspectiva do EEM, assumimos as quatro etapas propostas por Cyrino e Teixeira (2016), quais sejam: *proposição e apresentação da tarefa, desenvolvimento da tarefa, discussão coletiva e sistematização das aprendizagens*.

Em 19 de outubro de 2022, foi realizada a *proposição e apresentação da tarefa*, momento no qual Eduardo, com o apoio da professora, realizou esclarecimentos à turma a respeito da dinâmica de trabalho e a proposição da tarefa (entrega da versão impressa, leitura da tarefa e uma breve discussão de dúvidas quanto ao que era solicitado). Neste momento, os futuros professores foram orientados a registrar suas resoluções na folha da tarefa impressa, sempre justificando suas resoluções por meio de cálculos, textos ou de ambas. Eles foram informados de que estas resoluções e justificativas deveriam ser escritas de maneira clara, pois,

poderiam ser utilizadas em fase posterior na aula, durante a *discussão coletiva*. Para iniciar o *desenvolvimento da tarefa*, os futuros professores foram organizados em duplas.

Nos dias 26 de outubro e 09 de novembro de 2022 aconteceu a etapa de *discussão coletiva*, organizada em dois momentos. No primeiro dia foram discutidos os itens 1) e 2) da tarefa, a partir das resoluções compartilhadas por algumas duplas; e no segundo dia, foi discutido o item 3), também a partir do que alguns futuros professores compartilharam. O item 4) não foi discutido, pois, os alunos não conseguiram resolvê-lo. Desse modo, ele foi resolvido por Eduardo com o apoio dos futuros professores da turma. A partir da resolução conjunta do item 4) foi realizada a *sistematização* do conceito de função exponencial.

Para a seleção das produções escritas dos alunos, utilizamos como critério a frequência em todas as aulas, a clareza e organização dos registros e a variedade de conceitos mobilizados relacionados ao conceito de função exponencial. Assim, nem todos os itens da tarefa foram analisados neste trabalho. Para a análise, buscamos identificar nos registros escritos analisados, indícios de conceitos mobilizados pelos futuros professores, a saber: *variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização no trabalho com função exponencial*. Com o intuito de preservar a identidade dos futuros professores, somente Eduardo e Laís são identificados por seus respectivos nomes.

4 RESULTADOS

Com base nos critérios adotados para seleção dos registros a serem compartilhados, seguem as resoluções selecionadas relativas aos itens 1), 2) e 3) da tarefa “*Investimentos*”.

4.1 Percepção da regularidade para o cálculo do valor do investimento após meses de aplicação no item 1

Para resolver o primeiro item da tarefa, era esperado que os alunos identificassem a *existência de grandezas variáveis*, valor monetário e tempo, e a *relação de dependência existente entre elas*: o valor do investimento em unidades monetárias *dependia* do tempo, em meses, da aplicação. Por meio de cálculos envolvendo razões (porcentagem) e da estratégia de recorrência, os alunos poderiam calcular mês a mês o valor do investimento ao final do período solicitado.

Uma dupla de futuros professores recorreu ao uso de uma relação matemática comumente trabalhada em aulas que tratam de aspectos da Matemática Financeira. Como não havíamos comentado a respeito do uso desse tipo de fórmula, inferimos que a dupla pode ter

relembrado desta relação, de vivências anteriores que remetiam a situações problema envolvendo investimentos.

Figura 3 - Recorte da resolução equivocada do item 1) da tarefa.

$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{\text{juros}} \\
 & J = C \cdot i \cdot t \\
 & C = \text{capital inicial (R\$ 18.000,00)} \\
 & i = \text{taxa de juros (3\% = 0,03)} \\
 & t = \text{tempo (6 meses)} \\
 & J = 18.000 \cdot 0,03 \cdot 6 \\
 & J = 3.240 \\
 & \text{R\$ } 18.000 + 3.240 = \text{R\$ } 21.240,00
 \end{aligned}$$

Fonte: Registros escritos dos alunos.

Por utilizar esta relação, substituindo valores de maneira coerente, entendemos que a dupla de futuros professores identifica de maneira correta quais são as *grandezas variáveis* da tarefa: o saldo de aplicação e o tempo de investimento.

No entanto, para o cálculo do investimento, a dupla não considerou o saldo ao final de cada um dos meses, contradizendo a ideia de investimento em que o saldo (montante) do mês subsequente é calculado a partir do saldo de investimento do mês anterior. Apesar de ter identificado as variáveis de maneira correta, a *correspondência* estabelecida entre as variáveis não estava coerente com o contexto da tarefa.

Ao observar os registros da dupla de futuros professores, Eduardo interveio, questionando-os: “Sabendo que se trata de um investimento, o que é feito com o lucro obtido ao final de cada mês?”. O questionamento possibilitou à dupla repensar sua estratégia, reconsiderando a correspondência estabelecida entre as variáveis, o que os fez apresentar um novo registro (Figura 4).

Figura 4 - Recorte da resolução correta do item 1) da tarefa.

Analisando mês a mês

$$1^{\text{º}} \text{ mês} = 18000 \cdot 0,03 = 540 + 18000 = 18540$$

$$2^{\text{º}} \text{ mês} = 18540 \cdot 0,03 = 556,2 + 18540 = 19096,2$$

$$3^{\text{º}} \text{ mês} = 19096,2 \cdot 0,03 = 572,89 + 19096,2 = 19669,09$$

$$4^{\text{º}} \text{ mês} = 19669,09 \cdot 0,03 = 590,07 + 19669,09 = 20259,16$$

$$5^{\text{º}} \text{ mês} = 20259,16 \cdot 0,03 = 607,77 + 20259,16 = 20866,93$$

$$6^{\text{º}} \text{ mês} = 20866,93 \cdot 0,03 = 626,01 + 20866,93 = \underline{\underline{21492,94}}$$

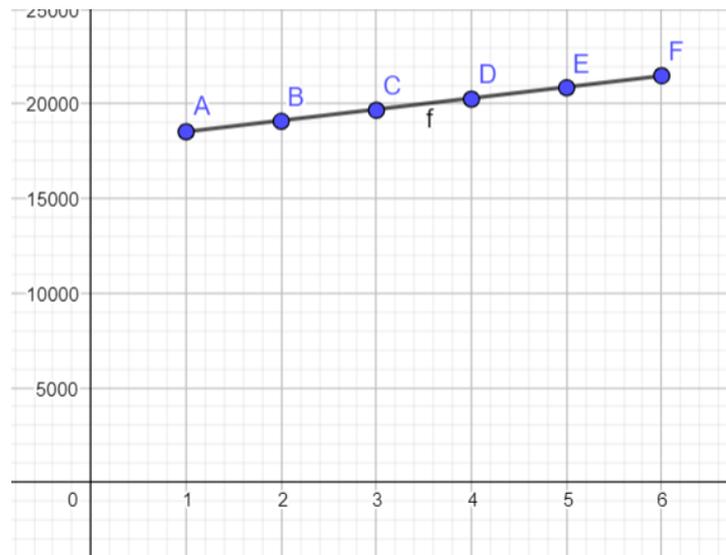
Fonte: Registros escritos dos alunos.

Por meio desta estratégia a dupla calculou o saldo dos meses subsequentes ao primeiro mês de aplicação, considerando o valor do saldo de investimento do mês anterior somado ao juro obtido decorrente do período da aplicação. Assim, os resultados apresentados em cada uma das linhas dos cálculos (Figura 4) indicam o saldo de Ana nos respectivos meses. Neste registro, além de indícios da *identificação de variáveis*, da *regularidade da relação entre elas*, da *relação de dependência existente*, é possível inferir que para a dupla ficou mais evidente a *correspondência unívoca* entre o mês considerado e o valor do saldo de investimento correspondente.

4.2 A representação gráfica do investimento no decorrer do tempo no Item 3

Com o item 3) da tarefa, era esperado que os futuros professores construíssem a representação gráfica da relação identificada entre as *grandezas variáveis*, o saldo de aplicação como variável dependente “y” e o tempo de aplicação à variável independente “x”, de modo que y depende de x, por meio de uma correspondência unívoca.

Com isso, os futuros professores poderiam representar a variação do investimento de Ana com o decorrer do tempo no plano cartesiano por meio de pares ordenados (x, y). Embora os futuros professores tenham representado a relação entre as variáveis por meio de uma reta, sugerindo uma correspondência linear aparentemente coerente, o comportamento do saldo financeiro descrito na tarefa é regido por uma relação exponencial, o que revela uma incoerência matemática na representação proposta (Figura 5).

Figura 5 - Recorte da representação gráfica do item 3) equivocada.

Fonte: Registro dos futuros professores.

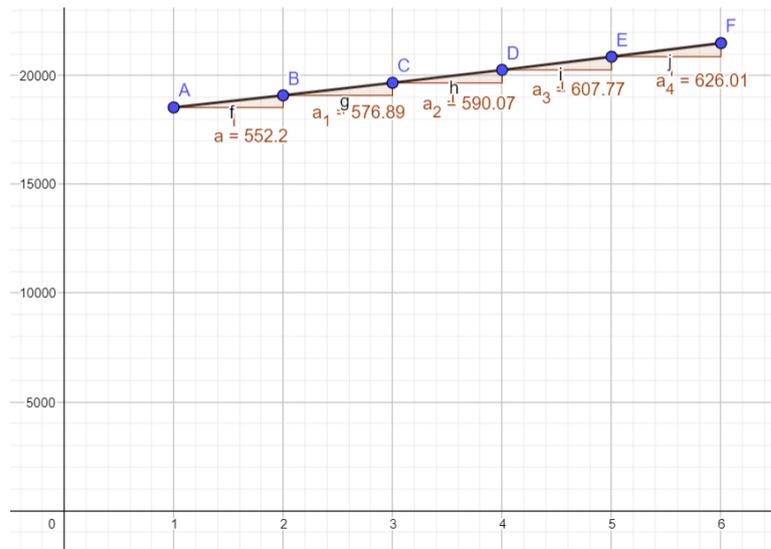
Inicialmente, esta dupla de futuros professores optou por representar graficamente a relação entre as grandezas com o apoio do *Software GeoGebra*. Os futuros professores representaram no eixo das ordenadas o valor dos juros obtidos mensalmente e no eixo das abscissas o período de aplicação feita por Ana. Mas, esta representação contradiz a ideia de representar graficamente o investimento de Ana, pois considera somente o valor dos juros obtidos e o período de aplicação, descartando o saldo ao final de cada mês (valor anterior adicionado do valor dos juros referentes àquele período). Ao observar esta representação, Eduardo questionou: “*Esta representação indica o saldo do investimento?*”.

A partir do questionamento, a dupla observou que o período de aplicação representado no eixo das abscissas se relacionava com o saldo de investimento que deveria ser representado no eixo das ordenadas e não somente com o valor dos juros correspondentes a cada mês. Observa-se que os futuros professores evidenciam dificuldades em traduzir a relação algébrica entre as variáveis para sua representação gráfica, visto que, neste caso, chegaram a alterar as grandezas variáveis, de “saldo de investimento e tempo” para “valor dos juros a cada mês e tempo”, algo incoerente com o que foi solicitado. Ademais, percebemos que a dificuldade se estende à interpretação do gráfico, uma vez que, apenas visualizando-o, já seria possível notar que não era um gráfico apropriado, o que está diretamente relacionado a problemas em entender o conceito de juros compostos.

Na discussão coletiva outra dupla de alunos apresentou sua representação gráfica para o item 3. Eles também optaram por utilizar o *Software Geogebra*, e, de maneira análoga à dupla anterior, recorreram a uma representação gráfica equivocada da variação entre as grandezas,

tratando o valor dos juros a cada mês como variável dependente e o tempo como variável independente. A dupla traçou segmentos de retas entre os pontos plotados já que percebeu, pelo cálculo da inclinação de cada segmento, que os pontos plotados não pertenciam a uma mesma reta (Figura 6).

Figura 6 - Recorte da representação gráfica do item 3) correta



Fonte: Registro dos futuros professores.

Apesar de identificarem que o comportamento do crescimento dos dados não era linear, devido à diferença na inclinação dos segmentos construídos, a dupla de alunos não foi capaz de justificar como se dava o crescimento destes dados por meio de uma função que não fosse do tipo linear. Os registros escritos, analisados para este item da tarefa, evidenciam a dificuldade de os futuros professores compreenderem quais são as grandezas variáveis e de que maneira a correspondência entre elas se dá, quando a forma de registro é alterada, da forma algébrica para a geométrica.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo discutir conceitos relacionados à função exponencial que foram mobilizados por futuros professores ao resolverem uma tarefa exploratória cujo contexto estava relacionado à Matemática Financeira.

Os registros escritos analisados evidenciaram que a mobilização de conceitos relacionados à função exponencial, subjacentes às outras funções matemáticas, não é algo simples para os futuros professores. Ainda que eles tenham identificado as grandezas variáveis, a relação de dependência entre elas e a regularidade com que se relacionavam, o que lhes

possibilitou estabelecer uma correspondência entre as referidas variáveis, esse processo de mobilização evidenciou insegurança e (des)conhecimentos matemáticos.

Entendemos que, por se tratar de uma tarefa exploratória desenvolvida na perspectiva do EEM, intervenções mais assertivas por parte do professor poderiam ter apoiado os futuros professores a esclarecerem dúvidas e a (re)negociarem significados enquanto resolviam a tarefa. Essas ações poderiam ter possibilitado aos futuros professores mobilizarem conceitos como o da generalização, demandado para a resolução do último item da tarefa, e que não foi evidenciado.

Por fim, ressaltamos a importância de criar espaços formativos que promovam a problematização e a construção coletiva de significados matemáticos, especialmente no que se refere a conceitos fundamentais das funções, como o de função exponencial. Destacamos, nesse sentido, a importância da atuação docente no planejamento, condução e mediação no trabalho com tarefas exploratórias, de modo a criar um ambiente propício à reflexão, ao questionamento e à negociação de significados. Assim, reforça-se que o Ensino Exploratório da Matemática se configura como uma alternativa para a formação de professores mais críticos, autônomos e preparados para promover práticas pedagógicas que estimulem o protagonismo dos alunos e a construção significativa do conhecimento matemático.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Média e Tecnológica (SEMTEC). **Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Matemática**. Brasília, 2018.

CABERLINI, G. S. F. Práticas de Ensino Exploratório em Matemática: implicações para a aprendizagem dos alunos e para o trabalho docente. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE: Produção Didático-pedagógica**, 2016. Curitiba: SEED/PR., 2018. v.2 (Cadernos PDE).

CANAVARRO, Ana Paula. **Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios**. Educação e Matemática, Lisboa, n. 115, p. 11-17, nov./dez. 2011.

CARAÇA, Bento de Jesus. Funções: Estudo matemático das leis naturais. In: CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 1º. ed. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951. cap. 1, p. 107-139.

CORREIA, G. S.; CAZORLA, I. M. A função exponencial na pesquisa em Educação Matemática: como dialoga com a BNCC?. **Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, [S. l.], v. 12, n. 4, 2021.

CYRINO, M. C. C. T. **Recurso multimídia na formação de professores que ensinam matemática**: análise da prática de professores em aulas na perspectiva do ensino exploratório. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, p. 1-3, 16 jul. 2016.

CYRINO, M. C. C. T.; TEIXEIRA, B. R. **O ensino exploratório e a elaboração de um framework para os casos multimídia**. In: CYRINO, M. C. C. T. (Org.). **Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática: elaboração e perspectivas**. Londrina: EDUEL, 2016.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. Ensino exploratório e casos multimídia na formação de professores que ensinam matemática. In: CYRINO, M. C. C. T. **Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática**. Londrina: Eduel, 2016. p. 19 -32.

LIMA, E. L.; CARVALHO P. C. P., WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. v. 1. (Coleção do professor de matemática).

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, Lisboa, v. 22, n.2, p. 29-53, 2013.

PONTE, J. P. Gestão curricular em matemática. In: GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, João Pedro. **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. 1. ed. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. cap. 1, p. 13-113.

REZENDE, V.; NOGUEIRA, C. M. I. Ideias base do conceito de função mobilizadas (ou não) por estudantes de diferentes níveis de ensino. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2018, Foz do Iguaçu. **Anais...** Foz do Iguaçu: [s. n.], 2018. p. 1-11.

ROSSA, E.; ESTEVAM, E. Caracterizando tarefas matemáticas de natureza exploratória. **Revista Insignare Scientia - RIS**, [s. l.], v. 5, n. 5, p. 286-300, dez. 2022.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 3, n. 4, p. 268-275, 1998.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. A. Sobre funções e a linguagem matemática da professores do Ensino Médio. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 8, n. 1-2, p. 7-28, 2000.

CAPÍTULO II

ADAPTAÇÃO DE QUESTÕES DO ENEM (2022) SOBRE FUNÇÃO QUADRÁTICA PARA O TRABALHO NO ENSINO EXPLORATÓRIO

DOI: 10.51859/ampla.epm963.1125-2

Luiza Batista de Lima
luizablina123@gmail.com

Láís Maria Costa Pires de Oliveira
lais.oliveira@ies.unespar.edu.br

Wellington Piveta Oliveira
wellington.piveta@ufpr.br

RESUMO

Este estudo tem como objetivo apresentar adaptações para questões de matemática do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) realizado no ano de 2022, que abordam o conceito de função quadrática, como possibilidade de trabalho em aulas assentes na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática (EEM). A adaptação das questões do ENEM foi realizada com base em estudos teóricos acerca da dinâmica de aulas no EEM e de aspectos a serem considerados em tarefas que se mostram potenciais para sustentar práticas exploratórias. Ao considerar e incorporar às questões aspectos considerados em tarefas exploratórias, como *contribuir para aprendizagem significativa da matemática e o desenvolvimento de capacidades como o raciocínio e a comunicação; pontuar aspectos que podem ser utilizados para elucidar dúvidas dos alunos, apoiar a percepção de ideias e conceitos fundamentais; envolver situações cotidianas; possuir contextos acessíveis; permitir resoluções que variam das mais simples às mais elaboradas*, as tarefas mostraram-se potenciais para desencadear atividades exploratórias, como a *interpretação de situações não matemáticas em termos matemáticos, a atribuição de significado para a Matemática, o engajamento dos alunos na resolução da tarefa, discussão e negociação de significados coletivos, atribuição de significado à Matemática, o trabalho autônomo no processo de resolução da tarefa, reconhecimento do potencial de diferentes estratégias de resolução para a tarefa*. Assim, a possibilidade de adaptar questões de avaliações externas, familiares a professores e alunos do Ensino Médio, para a perspectiva do EEM, revela-se uma alternativa promissora que pode encorajar (futuros) professores do desenvolvimento de aulas em perspectivas alternativas ao ensino expositivo e que vai ao encontro das demandas contemporâneas de promover processos de ensino e de aprendizagem mais desafiadores e significativos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Tarefas exploratórias. Ensino Médio.

1 INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) aponta a necessidade de, em aulas de matemática, “[...] estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos” (Brasil, 2018, p.529). Para tanto, é necessário que o ensino de matemática não esteja pautado exclusivamente em aulas tradicionais, expositivas e diretivas, cujo foco está na transmissão de conhecimentos pelo professor e, a aprendizagem dos alunos fique limitada à memorização e posterior reprodução de informações aplicadas em listas de exercícios.

Tanto a BNCC como outros documentos anteriores a ela (Brasil, 1998; Paraná, 2008) discutem abordagens metodológicas alternativas ao ensino expositivo, que se alinham às demandas escolares e sociais contemporâneas, as quais prezam, sobretudo, pela promoção da autonomia dos alunos, do desenvolvimento de seu senso crítico, de sua capacidade de resolver problemas e de se comunicar.

Para tanto, é preciso promover trabalhos em sala de aula que sejam exigentes aos alunos, desafiando-os matematicamente, e isso perpassa a escolha e a proposta de tarefas desafiadoras que demandem a mobilização/o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos, a argumentação matemática, o trabalho colaborativo em sala de aula, entre outros aspectos. Nessa direção, uma possibilidade de trabalho em sala de aula se dá por meio de metodologias como a do Ensino Exploratório de Matemática (EEM), que constitui uma perspectiva de ensino que se contrapõe ao ensino tradicional e pressupõe que a aprendizagem dos alunos decorre do trabalho sério que eles realizam com tarefas desafiadoras (Canavaro, 2011).

No entanto, selecionar ou elaborar tarefas com potencial para sustentar práticas como as do EEM que vão ao encontro das expectativas dos documentos normativos da Educação Básica, pode não ser uma tarefa fácil para os professores de matemática; é preciso tempo, clareza quanto aos objetivos de aprendizagem que se deseja alcançar, potencialidades e fragilidades do conhecimento matemática de seus alunos, dentre outros aspectos. Consideramos então, profícua a possibilidade de adaptação de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), uma avaliação externa familiar a alunos e professores dos anos finais da Educação Básica, para o trabalho na perspectiva de aulas do EEM.

O ENEM, uma avaliação em grande escala, composta em sua maioria por questões de múltipla escolha, tem desempenhado um papel relevante na avaliação do conhecimento dos alunos que finalizaram ou estão finalizando o Ensino Médio no Brasil, sendo legitimada como

uma das formas de ingresso em cursos do Ensino Superior. As questões de matemática do ENEM, em particular, são projetadas para avaliar a capacidade dos estudantes em aplicar conceitos aprendidos em momentos anteriores, em determinadas situações que demandam a mobilização de raciocínio lógico e da capacidade de resolução de problemas.

Ao considerar os aspectos anteriores, neste estudo, apresentamos adaptações para questões do ENEM, que tratam especificamente do conceito de função quadrática, de maneira que possam assumir características de tarefas exploratórias para o trabalho com alunos do Ensino Médio na perspectiva do EEM. Nas seções seguintes apresentamos aspectos teóricos a respeito de tarefas matemáticas no EEM, aspectos metodológicos seguidos das adaptações das questões e das considerações finais.

2 TAREFAS EXPLORATÓRIAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Tarefas matemáticas são elementos que ocupam um papel relevante na mediação dos processos de ensino e de aprendizagem no contexto escolar. Alinhadas a pressupostos teóricos, metodológicos e às intenções do professor, que sustentam e orientam as práticas pedagógicas, as tarefas podem assumir características e propósitos distintos, possibilitando diferentes oportunidades de aprendizagem. Tarefas que solicitam, por exemplo, a execução de procedimentos memorizados pelos alunos, muito comuns em aulas tradicionais, representam um tipo de oportunidade de aprendizagem diferente daquele possibilitado por tarefas não rotineiras, que exigem dos alunos pensar a respeito de conceitos matemáticos, de seus significados e de suas possíveis relações (Stein; Smith, 1998).

Neste estudo assumimos *tarefa* como qualquer proposição realizada pelo professor, que objetiva concentrar a atenção dos alunos em uma ideia matemática (Jesus, 2011). Deste modo, tarefa e atividade não são concebidas como sinônimos: uma tarefa é aquilo com que os alunos lidam quando estão envolvidos em uma atividade, isto é, uma tarefa é o objetivo da atividade (Ponte, 2005).

Documentos normativos da Educação Básica destacam a relevância do trabalho com tarefas desafiadoras como possibilidades privilegiadas de atividade matemática, potencialmente ricas “[...] para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) [...]” (Brasil, 2018, p. 266). Especificamente no Ensino Médio, os documentos destacam que para desenvolverem a capacidade de investigação e de resolução de problemas devem ser possibilitadas aos alunos oportunidades de “[...] mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar,

argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados” (Brasil, 2018, p. 519).

O potencial de uma tarefa está relacionado aos conceitos e processos matemáticos que ela pode apoiar os alunos a desenvolverem (Ponte, 2005) e à dinâmica de trabalho em que alunos e professor se envolvem para resolvê-la e discuti-la: como acontece a proposição da tarefa, como os alunos se organizam para resolvê-la, como o professor realiza a gestão do tempo e das interações com os alunos e entre eles para que se mantenham engajados no trabalho com a tarefa, que recursos são disponibilizados, que papéis são assumidos pelos alunos e pelo professor na aula (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013; Ponte, 2014). Por isso,

[...] ao selecionar e organizar tarefas, o professor precisa ter clareza de que estas vão além dos conteúdos que devem ser mobilizados para sua realização. Elas envolvem processos cognitivos relativos à compreensão, ao estabelecimento de estratégias e procedimentos, e à validação (Cyrino; Jesus, 2014, p. 753).

Neste sentido, o Ensino Exploratório de Matemática (EEM) tem se mostrado uma perspectiva de aulas, alternativa ao ensino expositivo, profícua para promover a aprendizagem dos alunos sustentada pelo trabalho que eles desenvolvem com *tarefas ambiciosas* (Rossa; Estevam, 2022) e da reflexão que fazem acerca deste trabalho (Ponte, 2014).

O ensino tradicional, expositivo, é marcado expressivamente pela transmissão de informações pelo professor e pela assimilação dessas informações pelos alunos por meio da memorização e da resolução de exercícios de fixação, caracterizados por induzir o aluno a utilizar estratégias específicas para lidar com conceitos estudados. No entanto, limitar o ensino da Matemática à resolução mecânica de listas de exercícios é incorrer no risco de empobrecer os desafios propostos e de desmotivar os alunos (Ponte, 2005).

Em contrapartida, no EEM os alunos são chamados para o centro da atividade matemática em sala de aula, contexto em que a aprendizagem

[...] é um processo simultaneamente individual e coletivo, resultado da interação dos alunos com o conhecimento matemático, no contexto de uma certa atividade matemática, e também da interação com os outros (colegas e professor), sobrevivendo processos de negociação de significados (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013, p. 31).

A construção de conhecimento pelos alunos no EEM acontece de maneira ativa e situada, por meio da realização de tarefas matemáticas ambiciosas da qual decorre a sistematização de conceitos e ideias matemáticas em uma discussão coletiva, em ambientes criados e sustentados pelas intencionalidades do professor (Oliveira; Cyrino, 2016; Ponte, 2005;

Canavarro, 2011). Uma aula no EEM é geralmente estruturada em quatro fases *a proposição da tarefa, o desenvolvimento da tarefa, a discussão da tarefa e a sistematização das aprendizagens* (Canavarro; Oliveira; Menezes, 2013).

Na *proposição da tarefa*, o professor apresenta aos alunos uma tarefa matemática, que comumente é um problema ou uma investigação. Estas tarefas demandam dos alunos a compreensão aprofundada do que é solicitado, a elaboração de uma estratégia de resolução para o que é proposto e a reflexão acerca dos resultados obtidos (Ponte; Quaresma; Branco, 2012). É necessário recorrer a tarefas que apresentem um alto nível de demanda cognitiva (Stein; Smith, 1998), que desafiem os alunos, mas, que sejam possíveis de eles resolverem, que lhes possibilitem raciocinar matematicamente sobre ideias importantes e atribuir sentido ao conhecimento matemático empreendido durante a sua resolução. Nesta etapa, o professor deve assegurar que toda a turma entendeu o que é solicitado na tarefa, para que os alunos da turma se sintam seguros em resolvê-la por meio de um trabalho conjunto.

No *desenvolvimento da tarefa*, os alunos, preferencialmente, organizados em pequenos grupos iniciam um trabalho colaborativo para resolver a tarefa. Nesse processo, eles mobilizam conhecimentos já constituídos, negociam significados produzidos para ideias e conceitos matemáticos. Apesar do incentivo ao trabalho autônomo, os alunos não trabalham de maneira independente, isto é, sem o apoio do professor. Como mediador do trabalho dos alunos com a tarefa, o professor assume um papel importante auxiliando os alunos em algumas dúvidas ou dificuldades, incentivando-os a utilizar e a registrar diferentes estratégias de resoluções, mas sem indicar conceitos ou procedimentos matemáticos a serem aplicados. Do trabalho dos alunos devem surgir diversas e diferentes resoluções para a tarefa. O conhecimento matemático a ser sistematizado, está diretamente articulado às produções e discussões desencadeadas nesta fase, as quais serão compartilhados no decorrer da discussão coletiva.

Para promover a *discussão da tarefa*, de modo que este seja um momento matematicamente relevante para a aprendizagem os alunos, o professor seleciona e sequênci algumas resoluções, de acordo com critérios previamente estabelecidos, com o intuito de discutir as potencialidades, diferenças e semelhanças entre as estratégias compartilhadas. Essa ação do professor possibilitará que conceitos e ideias matemáticas, que serão sistematizadas na sequênci ou, concomitantemente às discussões, se revelem. Na *sistematização das aprendizagens* ocorre a apresentação formal e a explicação dos conceitos e ideias que a tarefa possibilita contemplar, a partir das discussões feitas a respeito das resoluções apresentadas pelos alunos.

CAPÍTULO II

Para que uma aula no EEM se desenvolva de maneira próxima a cada uma dessas etapas e de maneira que a tarefa proposta seja explorada em sua completude, é essencial que o professor antecipe toda a dinâmica de trabalho antes da proposição da tarefa em sala de aula. Essa antecipação envolve a seleção, adaptação ou elaboração de tarefa(s), a antecipação de estratégias de resolução dos alunos (corretas e equivocadas) e de aspectos a serem considerados para a boa conduta da aula (Canavarro, 2011; Canavarro; Oliveira; Menezes, 2013). Selecionar, adaptar, bem como propor e desenvolver tarefas ambiciosas em sala de aula podem constituir desafios aos professores, que por vezes sentem dificuldade de se orientarem pelo o quê os alunos podem aprender a respeito de ideias, estratégias e conceitos matemáticos em aulas estruturadas a partir da proposição dessas tarefas.

Com relação às tarefas alinhadas ao EEM, Rossa e Estevam (2022) constituíram um quadro (Quadro 1) com características a serem consideradas ao selecionar, elaborar ou adaptar tarefas de natureza exploratória, o que pode apoiar os professores nesse processo desafiador.

Quadro 1 - Aspectos a serem considerados em tarefas de natureza exploratória

Características da tarefa	Descritores	Aspectos que podem reduzir o potencial da tarefa	Atividade exploratória desencadeada
Propostas instigadoras	Permitir raciocínio matemático; Não apresentar conceitos e procedimentos diretamente; Conter problema(s) ou situações significativas, com potencial para provocar os alunos; Contribuir para aprendizagem significativa da matemática e o desenvolvimento de capacidades como o raciocínio e a comunicação.	Situações em que são utilizados procedimentos sem reflexão; Apresentar diretamente conceitos ou procedimentos.	Interpretar situações em termos matemáticos; Relacionar conceitos e procedimentos matemáticos a situações; Engajar-se na resolução da tarefa; Desenvolver vocabulário matemático.
Envolver formas complexas de pensamento	Situações consideradas de elevado grau de exigência cognitiva, que priorizam procedimentos com conexão e fazer matemática.	Situações consideradas de baixo grau de exigência cognitiva, em que são utilizados procedimentos mecânicos ou padronizados, sem reflexão.	Estabelecer conjecturas e justificativas baseadas em fatos e propriedades conhecidas; Relacionar conceitos e procedimentos matemáticos; Atribuir significado à Matemática; Desenvolver capacidade de resolver problemas.

CAPÍTULO II

Características da tarefa	Descritores	Aspectos que podem reduzir o potencial da tarefa	Atividade exploratória desencadeada
Estimular o interesse dos alunos e possuir contexto(s) significativo(s)	Temas de interesse dos alunos; Envolvimento com situações cotidianas; Contextos que estejam de acordo com a realidade dos alunos; Situações acessíveis, mas que proporcionam certo desafio.	Situações descontextualizadas, que não possuem relação com as experiências dos alunos, podendo gerar a rejeição da tarefa.	Interpretar situações em termos matemáticos; Transformar a situação real em uma situação matemática; Discutir e negociar significados coletivamente; Atribuir significado à Matemática
Grau de desafio compatível com os alunos	Linguagem e contexto acessíveis; Conhecimentos e experiências que se supõem que os alunos possuem são necessários ou importantes para a resolução da tarefa; Permitir que os alunos se apoiem em experiências anteriores.	Situações que denotam caráter avançado em relação aos conhecimentos dos alunos;	Permitir a exploração matemática e não somente a assistemática; Engajar-se na resolução da tarefa; Oferecer condições para conjecturas, justificativas e validações.
Auxiliar o professor com pontos-chave	Possuir aspectos, por exemplo, no enunciado de uma situação, que podem ser utilizados para elucidar dúvidas dos alunos, seja como apoio ou provocações a percepção de ideias e conceitos fundamentais.	Possuir um único problema ou uma questão muito diretiva; Itens desarticulados ou muito complexos.	Conjecturar e justificar aspectos matemáticos e não-matemáticos relacionados ao objetivo da aula; Trabalhar autonomamente no processo de resolução da tarefa.
Diferentes estratégias de resoluções e diferentes níveis de complexidade	Não ser limitada no sentido de possuir uma única estratégia de resolução; Permitir resoluções que variam das mais simples às mais elaboradas.	Situações em que é apresentado o que deve ser feito, não permitindo a exploração.	Relacionar conceitos e procedimentos matemáticos; Reconhecer o potencial de diferentes estratégias de resolução para a tarefa; Atribuir significado à Matemática;
Articular aos objetivos do professor	Tarefas elaboradas, selecionadas ou adaptadas com base em objetivos bem estabelecidos; O efeito cumulativo de explorações de diferentes tipos de tarefas conduz ao desenvolvimento de ideias implícitas nos alunos sobre a natureza da Matemática.	Situações selecionadas pelo professor, sem critérios bem definidos.	Conjecturar e justificar aspectos matemáticos e não-matemáticos relacionados ao objetivo da aula

Características da tarefa	Descritores	Aspectos que podem reduzir o potencial da tarefa	Atividade exploratória desencadeada
Autonomia no trabalho dos alunos e manutenção da exigência cognitiva da tarefa	Permitir que iniciem e realizem o trabalho com intervenções mínimas do professor; Fomentar justificativas para raciocínios, estratégias e procedimentos empregados e ações realizadas, em processos de negociação de significados; Oferecer meios para avaliar seu próprio progresso.	Linguagem complexa para os alunos; Situações com caráter avançado em relação aos conhecimentos dos alunos; Alunos não são responsabilizados pelo trabalho desenvolvido.	Trabalhar autonomamente no processo de resolução da tarefa, especialmente em grupos; Justificar estratégias, procedimentos, representações e ideias empregados; Responsabilizar-se pelas produções e aprendizagens.
Promover raciocínio indutivo	Apresentar situações com contextos ricos e com potencial para, a partir de casos e fatos identificados, oferecer fundamentos para generalizações matemáticas, a partir de processos de descontextualização.	Apresentar diretamente ou procedimentos; Itens desarticulados.	Raciocinar de forma indutiva, resolvendo e analisando casos particulares para posteriores ampliações e generalizações.

Fonte: Rossa, Estevam (2022).

Ao considerar os aspectos expostos no quadro, propomos adaptações para questões do ENEM, realizado no ano de 2022, que abordam o conteúdo de função quadrática para que estas possam ser trabalhadas no Ensino Médio, por meio de aulas na perspectiva do EEM.

3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Este estudo tem como objetivo apresentar adaptações para questões da prova de matemática do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), realizada no ano de 2022, envolvendo o conceito de função quadrática, como uma opção para (futuros) professores poderem trabalhar com alunos do Ensino Médio, em aulas na perspectiva do EEM. A escolha por esta avaliação externa de nível nacional deveu-se à relevância que o ENEM assume, visto que se trata de uma prova realizada anualmente por estudantes em todo o país, objetivando oferecer oportunidade de acesso ao Ensino Superior em universidades públicas e particulares.

Com um total de 180 questões de múltipla escolha, a prova do ENEM aborda diversos conteúdos do currículo do Ensino Médio referentes às quatro áreas de conhecimento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), sendo elas: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Ao considerarmos a avaliação referente ao ano de 2022, realizamos um inventário das quarenta e cinco questões objetivas de matemática, buscando identificar o principal conceito, ideia ou conteúdo matemático necessário para resolver cada uma delas, de maneira matematicamente coerente, em acordo com os conteúdos básicos do Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP) (Paraná, 2021). As referidas informações foram organizadas no Quadro 2.

Quadro 2 - Conteúdos matemáticos na prova do ENEM 2022.

Conteúdo matemático identificado	Quantidade de questões na prova do ENEM 2022
Estatística	5
Estudo das Probabilidades	1
Geometria Plana	2
Geometria Espacial	8
Geometria Analítica	2
Análise Combinatória	3
Razão, Proporção e Porcentagem	10
Função Afim	2
Função quadrática	3
Progressão Aritmética	3
Equações e Inequações	3
Sistemas Lineares	1
Conjuntos Numéricos	2

Fonte: Elaborado pelos autores.

Para este estudo optamos por propor a adaptação de duas questões referentes ao conceito de função quadrática. A escolha por este conceito ocorreu devido à afinidade da primeira autora do trabalho com o tema, algo que se desenvolveu em sua trajetória como aluna da Educação Básica. A Função Polinomial de Grau 2, ou simplesmente Função quadrática, é um conceito que possibilita a exploração de elementos algébricos e gráficos, como o valor assumido por seus coeficientes e sua influência na representação gráfica, além da conhecida fórmula de Bháskara para calcular as raízes de uma função deste tipo.

Apesar da diversidade de elementos que podem ser explorados em tarefas que tratem sobre função quadrática, e de este ser um conteúdo relevante do Ensino Médio, não só nos estudos da matemática, mas também na física, apenas três das quarenta e cinco questões de matemática do ENEM abordaram alguma ideia referente a este conceito. Assim, selecionamos duas destas questões para propor adaptações a fim de que elas assumam características de tarefas exploratórias (Rossa; Estevam, 2022) para constituírem opções de trabalho em aulas na perspectiva do EEM.

O processo de adaptação constituiu na resolução de cada uma das questões, buscando identificar que conhecimentos matemáticos relacionados à função quadrática os alunos deveriam mobilizar para resolver cada uma delas e então, propusemos adaptações às questões.

Na seção seguinte apresentamos cada uma das questões, como constam na prova do Enem de 2022, e a adaptação proposta com base nas características das tarefas exploratórias estabelecidas por Rossa e Estevam (2022).

4 ADAPTAÇÕES DE QUESTÕES DO ENEM PARA AULAS NO EEM

Apresentamos nesta seção a adaptação das questões de número 158 e 168 do ENEM 2022 para que possam ser trabalhadas em aulas na EEM sustentando práticas exploratórias.

A primeira questão, identificada na prova do ENEM 2022 como Questão 158 (Figura 1), está contextualizada no cenário de uma epidemia em determinada cidade e indica a quantidade de pessoas infectadas pela doença em função do tempo (meses), por meio da representação algébrica de uma função quadrática. A questão solicita que o aluno identifique o período em que há maior quantidade de infectados.

Figura 1 - Questão retirada da prova de matemática do ENEM

Ao analisar os dados de uma epidemia em uma cidade, peritos obtiveram um modelo que avalia a quantidade de pessoas infectadas a cada mês, ao longo de um ano. O modelo é dado por $p(t) = -t^2 + 10t + 24$, sendo t um número natural, variando de 1 a 12, que representa os meses do ano, e $p(t)$ a quantidade de pessoas infectadas no mês t do ano. Para tentar diminuir o número de infectados no próximo ano, a Secretaria Municipal de Saúde decidiu intensificar a propaganda oficial sobre os cuidados com a epidemia. Foram apresentadas cinco propostas (I, II, III, IV e V), com diferentes períodos de intensificação das propagandas:

- I: $1 \leq t \leq 2$;
- II: $3 \leq t \leq 4$;
- III: $5 \leq t \leq 6$;
- IV: $7 \leq t \leq 9$;
- V: $10 \leq t \leq 12$.

A sugestão dos peritos é que seja escolhida a proposta cujo período de intensificação da propaganda englobe o mês em que, segundo o modelo, há a maior quantidade de infectados. A sugestão foi aceita. A proposta escolhida foi a

A I.

B II.

C III.

D IV.

E V.

Fonte: ENEM 2022.

Para resolver esta questão é necessário que o aluno identifique o registro analítico $p(t) = -t^2 + 10t + 24$ como uma das representações de uma função quadrática e que associe a este registro, sua representação gráfica, qual seja, uma parábola com concavidade voltada para baixo, devido ao coeficiente a da função ser negativo (-1); uma curva simétrica a um eixo vertical, que contém seu vértice e é paralelo ao eixo das ordenadas.

É preciso também que os alunos conheçam uma estratégia matemática para encontrar o valor do ponto de máximo da parábola; isso pode ser feito por meio do cálculo das raízes da equação (soma e produto, a fórmula de Bháskara), isto é, em que meses do ano o número de pessoas infectadas é igual a zero e encontrar o ponto de máximo da parábola, que corresponde

ao valor de t (meses) em que há o maior número de contaminados, um ponto simétrico às raízes (quando o t máximo vale 5, a quantidade de pessoas infectadas p é igual à 49). O valor do ponto de máximo pode ser encontrado também, por meio de outra estratégia, a fórmula para o cálculo de X_v de uma parábola $x_v = \frac{-b}{2a}$. Por meio de uma das estratégias apresentadas, é possível chegar a uma resposta numérica e escolher uma das alternativas como resposta correta.

Entendemos que a questão apresenta um *grau de desafio compatível com os alunos* que já estudaram o conceito de função quadrática em momento anterior ao da realização da prova, possibilitando que eles se *apoiem em experiências anteriores* para resolvê-la, mantendo-os engajados no processo de resolução, possibilitando o desenvolvimento de um trabalho autônomo. Observamos também que a questão é proposta por meio de um enunciado com *linguagem e contexto acessíveis, o contexto é significativo, envolvendo uma situação cotidiana e que está de acordo com a realidade dos alunos*. Essas características possibilitam aos alunos o desenvolvimento de atividades como *interpretar uma situação não matemática em termos matemáticos, engajar-se na resolução da tarefa*.

No entanto, por ser uma questão de múltipla escolha, coerente aos propósitos e à escala de uma avaliação nacional como o ENEM, existe apenas *um problema diretivo* a ser respondido, explícito no enunciado, qual seja: encontrar o intervalo de tempo com maior número de indivíduos infectados. Ademais, identificamos que esta é uma questão que pode ser considerada de *baixo grau de exigência cognitiva, já que para sua resolução poderão ser utilizados procedimentos mecânicos ou padronizados, sem reflexão pelos alunos*, aspecto que pode reduzir o potencial de uma tarefa (Rossa; Estevam, 2022).

Para que a tarefa se alinhe aos aspectos considerados em uma tarefa para o EEM, sugerimos uma adaptação (Quadro 3) para a questão de maneira que os alunos possam explorar outros conceitos para além do cálculo da coordenada x do vértice da parábola.

Quadro 3 - Adaptação da Questão 158

Ao analisar os dados de uma epidemia em determinada região do Estado do Paraná, peritos descreveram a quantidade de pessoas infectadas ao longo de um ano por meio da função $P(t) = -t^2 + 10t + 24$, sendo t um número natural que varia de 1 a 12, representando os meses do ano, e $P(t)$ a quantidade de pessoas infectadas no mês t , do referido ano. Para diminuir o número de infectados, a Secretaria Municipal de Saúde da região pretende intensificar a propaganda oficial sobre os cuidados com a epidemia de maneira que, no próximo ano o número de infectados seja menor.

- a) Qual é a quantidade de infectados durante todo o ano? Explique como você pensou.
- b) Represente graficamente a função $P(t)$. O que é possível observar com relação ao número de infectados durante o ano? Justifique como você pensou.
- c) Em que mês os peritos devem intensificar as propagandas como alerta à população? Justifique sua resposta.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Para resolver essa tarefa o aluno também mobilizará os conhecimentos pontuados anteriormente para resolver a Questão 158, mas, isso poderá ser feito ao lidar com questionamentos mais instigantes. Ainda que o enunciado da tarefa tenha sofrido poucas alterações, por considerarmos alinhado a diversos aspectos presentes em tarefas de natureza exploratória, incluímos e/ou reelaboramos questionamentos com o intuito de *pontuar aspectos que podem ser utilizados para elucidar dúvidas dos alunos, como apoio à percepção de ideias e conceitos fundamentais*. Alguns desses aspectos são: o comportamento dos dados que, em intervalos iguais, aumentam e diminuem em quantidade, o consequente comportamento do registro gráfico devido a essa variação de valores, a simetria existente entre os valores do número de doentes perceptível com o passar dos meses. Além disso, os questionamentos propostos na adaptação, não direcionam o aluno para o cálculo de algum valor específico, como na questão original, em que a pergunta proposta indicava ao aluno a necessidade de calcular o valor de x para o qual a imagem y apresentava maior valor. Desse modo, com a adaptação, o aluno deverá analisar outros elementos para além do valor da coordenada x do vértice da parábola.

Para responder cada um dos questionamentos propostos, justificando-os, o aluno precisa interpretar o que lhe é solicitado e raciocinar acerca de quais estratégias devem ser utilizadas para respondê-los de maneira coerente. Pensamos que os questionamentos da adaptação, apresentam potencial para *contribuir para a aprendizagem significativa de conceitos*

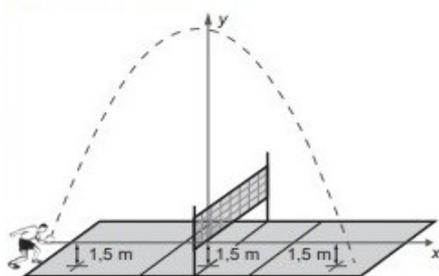
matemáticos e para o desenvolvimento de capacidades como o raciocínio e a comunicação, o que caracteriza a tarefa como sendo de *alto grau de exigência cognitiva*.

Os questionamentos pouco diretivos possibilitam também que a *tarefa seja resolvida por meio de mais de uma estratégia de resolução e que as resoluções apresentem diferentes níveis de complexidade*, sendo que as mais simples apresentam estratégias menos elaboradas, mas matematicamente coerentes (resolução por tentativa e erro, substituição de valores, resolução tabular) e as mais sofisticadas são as resoluções que lançam mão de termos e procedimentos matemáticos mais formais (uso de linguagem algébrica, generalizações).

A segunda questão, identificada na prova do ENEM 2022 como Questão 168 (Figura 2), apresenta um contexto familiar aos alunos em relação à rotina escolar: um jogo de voleibol de quadra. No enunciado é apresentada uma das regras do jogo referente ao saque, que o invalida caso a bola atinja o teto da quadra, uma função quadrática que representa a trajetória da bola durante um saque e a altura do chão até o ponto em que o saque se iniciou, marcando o início de uma trajetória descrita por uma parábola (Figura 2). Dada a altura dos tetos de cinco ginásios, solicita-se que o aluno indique, por meio de uma das alternativas, em qual(is) ginásio(s) o saque do jogador seria invalidado.

Figura 2 - Questão retirada da prova de matemática do ENEM.

Em jogos de voleibol, um saque é invalidado se a bola atingir o teto do ginásio onde ocorre o jogo. Um jogador de uma equipe tem um saque que atinge uma grande altura. Seu recorde foi quando a batida do saque se iniciou a uma altura de 1,5 m do piso da quadra, e a trajetória da bola foi descrita pela parábola $y = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12$, em que y representa a altura da bola em relação ao eixo x (das abscissas) que está localizado a 1,5 m do piso da quadra, como representado na figura. Suponha que em todas as partidas algum saque desse jogador atinja a mesma altura do seu recorde.



A equipe desse jogador participou de um torneio de voleibol no qual jogou cinco partidas, cada uma delas em um ginásio diferente. As alturas dos tetos desses ginásios, em relação aos pisos das quadras, são:

- ginásio I: 17 m;
- ginásio II: 18 m;
- ginásio III: 19 m;
- ginásio IV: 21 m;
- ginásio V: 40 m.

O saque desse atleta foi invalidado

- A** apenas no ginásio I.
- B** apenas nos ginásios I e II.
- C** apenas nos ginásios I, II e III.
- D** apenas nos ginásios I, II, III e IV.
- E** em todos os ginásios.

Fonte: ENEM (2022).

Para resolver esta questão o aluno deve associar a expressão dada no enunciado por $y = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12$ à representação analítica de uma função polinomial de grau 2 a qual é esboçada de maneira geométrica como uma parábola (Figura 2). Isto feito o aluno pode identificar a posição da concavidade da parábola associada à influência do valor do coeficiente angular

negativo $\left(\frac{-1}{6}\right)$; calcular o valor do y do vértice, que representa o valor máximo que a parábola pode alcançar, no caso, a altura máxima que o saque atingiu, por meio de estratégias como $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ ou por um processo mais longo, que demanda o cálculo das raízes da equação (local de início do saque e local em que a bola aterrissa do outro lado da rede) por meio da relação de soma e produto ou da fórmula de Bhaskara, o cálculo do máximo da parábola (ponto x localizado no eixo de simetria da parábola à igual distância das raízes) ou então por meio da fórmula para o cálculo de X_v de uma parábola $x_v = \frac{-b}{2a}$ e por fim substituir o valor de x na relação $y = \frac{-x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12$ para encontrar o valor máximo de y desejado. Assim, é possível que o aluno encontre o valor da altura do saque realizado e escolha uma das alternativas da questão como sendo a correta.

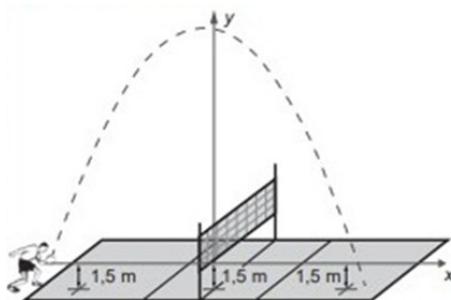
Novamente identificamos uma questão que, para sua resolução, os alunos podem se apoiar em experiências anteriores, em que a linguagem e o contexto são acessíveis aos alunos, o contexto é significativo, envolvendo uma situação possível de ser vivenciada no próprio colégio e há a possibilidade de tratar em termos matemáticos uma situação não matemática.

Apesar disso, esta é uma situação em que no enunciado é apresentado o que deve ser feito não permitindo exploração. A questão solicita calcular a altura do saque do jogador para verificar em qual das opções indicadas de ginásio o saque é invalidado. Esta característica nos parece ser uma situação de baixo grau de exigência cognitiva, em que são utilizados procedimentos de maneira mecânica ou padronizada, sem reflexão por parte dos alunos. E mais, a questão possui um único problema a ser resolvido e por ser de múltipla escolha, inviabiliza ou não permite a exploração da situação apresentada com referência a outros elementos da função quadrática, como o cálculo das raízes, ou da distância entre elas, tampouco favorece uma análise mais cuidadosa do registro gráfico esboçado como trajetória da bola durante o saque. No entanto, como já apontado, apesar de não se aproximar de uma tarefa exploratória, a questão como está proposta é coerente aos objetivos de uma avaliação em larga escala como o ENEM.

Para a adaptação da Questão 168 (Quadro 4), reduzimos a quantidade de informações do enunciado, mantendo apenas o que é necessário para o aluno compreender o contexto da tarefa e mantivemos a figura que mostra a trajetória da bola durante o saque.

Quadro 4 - Adaptação da Questão 168.

Em uma partida de voleibol o saque de um atleta atingiu o teto da quadra, invalidando o movimento. A trajetória da bola é descrita pela parábola $y = \frac{-x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12$ e o ponto inicial do saque está a 1,5m do piso, como indicado na imagem. Considere as medidas da quadra sendo: 18 metros de comprimento e 9 metros de largura.



- Qual deve ser a altura da quadra para que o saque não seja invalidado? Justifique sua resposta.
- Considere que o jogador está posicionado na linha de fundo da quadra para efetuar o saque. A que distância do jogador a bola atingiu o solo? A bola cairá dentro ou fora da quadra? Explique como você pensou.

Fonte: Elaborado pelos autores.

O objetivo com essa adaptação é que o aluno explore a distância, em módulo, entre os valores das raízes da função quadrática proposta no enunciado, neste caso, o alcance da bola de vôlei, e o valor do ponto máximo de uma parábola, com o apoio da representação gráfica, mas sem que conceitos ou procedimentos sejam indicados previamente.

Incluímos questionamentos mais abertos para *promover o raciocínio matemático*, de modo que o aluno interprete o que é solicitado e a partir disso investigue conceitos e estratégias que poderão ser utilizados para respondê-los de forma coerente. Ademais, essa adaptação, juntamente com as discussões que podem surgir a partir de sua discussão apresenta potencial para *promover aprendizagem significativa da matemática e o desenvolvimento de capacidades como o raciocínio e a comunicação* dos alunos já que nos preocupamos em solicitar justificativas de cada questionamento proposto.

Para resolver o item “a” da tarefa o aluno deverá calcular o valor do y do vértice, o que pode ser feito por meio da construção de uma tabela em que sejam registrados valores de y para diferentes valores assumidos por x , até a identificação do maior valor; pelo cálculo do valor da ordenada y da coordenada do vértice da parábola, por meio da relação $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$.

Já para o item “b”, pode-se calcular o valor das raízes da função por meio da relação de soma e produto ou da fórmula de Bhaskara, e em seguida calcular a distância, em módulo, entre

elas, já que pela ilustração, a origem do referencial utilizado é a rede que separa os dois lados da quadra de vôlei.

Para orientar o processo de adaptação das questões do ENEM para aulas na perspectiva do EEM, o Quadro 1 foi de suma importância, já que evidencia aspectos a serem considerados em tarefas exploratórias e pontua os aspectos que podem reduzir o potencial de uma tarefa, possibilitando fazer comparações e observações mais aprofundadas em questões que não possuem características exploratórias, como as questões do ENEM. Os aspectos elencados por Rossa e Estevam (2022) orientam o professor na adaptação de tarefas e permitem que ele utilize uma metodologia de ensino alternativa ao ensino tradicional, de modo a *desenvolver nos alunos a capacidade de resolver problemas* por meio de propostas desafiadoras.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo teve como objetivo apresentar possibilidades de adaptações para questões de matemática do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) realizado no ano de 2022, que abordam o conceito de função quadrática, como possibilidade para o trabalho com essas questões em aulas assentes na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática (EEM). Para as adaptações, apoiamo-nos nos aspectos pontuados por Rossa e Estevam (2022).

Ao proporcionar aos alunos do Ensino Médio tarefas mais desafiadoras, com situações instigantes e de alto grau de exigência cognitiva, mais complexas que somente exercícios de fixação, é possível ampliar os condicionantes para sua construção ativa do conhecimento como tempo, espaço comunicativo, informações, diversificando as atividades desencadeadas a partir do trabalho com a tarefa.

As questões que foram adaptadas, apesar de *apresentarem grau de desafio compatível com os alunos, linguagem acessível, contexto significativo, permitirem que os alunos se apoiem em experiências anteriores e se engajarem para resolvê-las, e possibilitarem a interpretação de uma situação não matemática em termos matemáticos*, caracterizavam-se por *um baixo grau de exigência cognitiva, possuir um único problema a ser respondido; por apresentarem diretamente os conceitos ou procedimentos a serem utilizados inviabilizando a exploração; e por trazerem situações em que são utilizados procedimentos mecânicos ou padronizados, sem reflexão*, de modo que não permitem a exploração por parte do aluno. Essas características se devem, principalmente, à natureza no ENEM como instrumento de avaliação em larga escala.

Para alinhar essas questões às aulas do EEM propusemos adaptações que contemplaram alguns descritores elencados no Quadro 1, como *contribuir para aprendizagem significativa da matemática e o desenvolvimento de capacidades como o raciocínio e a comunicação; pontuar*

aspectos que podem ser utilizados para elucidar dúvidas dos alunos, como apoio à percepção de ideias e conceitos fundamentais; envolver situações cotidianas; possuir contextos acessíveis; permitir resoluções que variam das mais simples às mais elaboradas, de modo que tais adaptações desencadearão atividades exploratórias, como a interpretação de situações em termos matemáticos que atribuem significado à Matemática, o engajamento na resolução da tarefa, discussão e negociação de significados coletivamente, atribuição de significado à Matemática, o trabalho autônomo no processo de resolução da tarefa, e o reconhecimento do potencial de diferentes estratégias de resolução para a tarefa.

A exploração do conceito de função quadrática por meio da resolução e discussão de tarefas ambiciosas mostra-se potencial para a aprendizagem dos alunos, no entanto, não basta apenas propor tarefas, o professor precisa estar atento às intervenções que devem ser feitas durante o desenvolvimento das tarefas pelos alunos no intuito de gerir o tempo da aula e manter um ambiente propício para a exploração; incentivar o aluno a justificar suas resoluções e registrá-las de maneira clara; promover a autonomia dos alunos, as interações entre eles e a discussão das resoluções. Uma aula exploratória se faz na articulação da proposta de tarefas desafiadoras e das ações do professor, que devem estar alinhadas a essa perspectiva de ensino.

Entendemos que este estudo pode servir de apoio ou inspiração para que (futuros) professores sintam-se encorajados a exercer a prática de adaptar tarefas, relacionadas a outros conceitos matemáticos na busca por desenvolverem aulas em perspectivas alternativas ao ensino pautado em ações expositivas e diretivas, como aquelas alinhadas à perspectiva do EEM.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 115, p. 11-17, 2011.

CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In: SANTOS, L. (ed.). **Investigação em Educação Matemática 2012**: Práticas de ensino da Matemática. Portalegre: SPIEM, 2012, p. 255–266.

CYRINO, M. C. C. T; JESUS, C. C. Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professoras que ensinam matemática. **Ciência & Educação**, v. 20, p. 751-764, 2014.

CYRINO, M. C. C. T; OLIVEIRA, H. Ensino exploratório e casos multimídia na formação de professores que ensinam matemática. In: CYRINO, M. C. C. T (org.). **Recurso multimídia**

para a formação de professores que ensinam matemática. Londrina: Eduel, 2016. p. 19-32.

JESUS, C. C. **Análise crítica de tarefas matemáticas: um estudo com professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** 2011. 95 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

PARANÁ. Escola Digital Professor. **Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP).** Curitiba: SEED, 2021.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. *In:* GTI (ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular.** Lisboa: APM, 2005.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. *In:* PONTE, João Pedro da (org.). **Práticas profissionais dos Professores de Matemática.** 1 ed. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014.

PONTE, J. P., QUARESMA, M., BRANCO, N. Tarefas de exploração e investigação na aula de Matemática. **Educação Matemática Em Foco**, v. 1, n. 1, p. 9-29, 2012.

ROSSA, E. P. O.; ESTEVAM, E. J. G. Caracterizando tarefas matemáticas de natureza exploratória. **Revista Insignare Scientia - RIS**, [S. l.], v. 5, n. 5, p. 286-300, 2022.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 3, n. 4, p. 268-275, 1998.

CAPÍTULO III

A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DO ESTUDO DO CONE EM DOIS CONTEXTOS: O LIVRO DIDÁTICO E A MODELAGEM MATEMÁTICA

DOI: 10.51859/amplla.epm963.1125-3

Caroline Cardoso Prado Satim
caroline.pradosatim02@gmail.com

Daniela Barbieri Vidotti
daniela.barbieri@unespar.edu.br

Láís Maria Costa Pires de Oliveira
laismariaa@gmail.com

Wellington Piveta Oliveira
wellington.piveta@ufpr.br

RESUMO

A teoria da Transposição Didática (TD) consiste em um processo de transformação dos saberes que constituem um sistema didático, a fim de torná-los mais compreensíveis e significativos no contexto da sala de aula. Considerando que existem *Atributos* da TD necessários para que esse processo ocorra de forma adequada, neste trabalho investigamos de que modo os *Atributos* da TD, do saber sábio para o saber a ensinar, são contemplados na introdução do estudo do Cone, em um livro didático do Ensino Médio e no planejamento de uma prática de Modelagem Matemática. Adotando uma abordagem qualitativa e exploratória para a pesquisa, nossas escolhas para os objetos analisados foram motivadas pelo fato de terem sido utilizados durante o Estágio Supervisionado do curso de Matemática da Unespar, na etapa da regência de classe. Como resultados destacamos a importância de usar os livros didáticos como suporte técnico e pedagógico e a atividade de Modelagem Matemática de forma complementar no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, durante o estudo, foi possível identificar diferenças nos processos de TD, especialmente relacionados à apresentação do estudo do cone nos dois contextos analisados.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Ensino Médio. Atributos.

1 INTRODUÇÃO

A tarefa de simplificar conhecimentos complexos e torná-los mais acessíveis e compreensíveis tem sido um desafio significativo na área da educação, especialmente quando se trata do ensino de matemática. Muitas vezes, os conceitos científicos podem parecer distantes e abstratos para os alunos. Diante desse desafio, surge a teoria da Transposição Didática (TD) proposta por Yves Chevallard, uma abordagem francesa que visa transformar o conhecimento científico (denominado saber sábio) em um saber escolar, transformando a linguagem formal presente nos textos acadêmicos, em uma linguagem mais acessível aos estudantes, relacionando-o à sociedade em que está inserido.

De acordo com alguns autores, para que a TD do saber sábio (conhecimento científico) para o saber a ensinar (objeto de ensino) ocorra de forma adequada, é necessário contemplar regras, características e requisitos como os categorizados sistematicamente por Cirilo (2008) como *Atributos da Transposição Didática*. Neste estudo, identificamos e analisamos os *Atributos da Transposição Didática* na apresentação do estudo do Cone (suas características geométricas, área da superfície e volume), tanto em um livro didático do Ensino Médio quanto no planejamento de uma prática de Modelagem Matemática.

Escolhemos o livro didático como objeto de estudo, pois esse material constitui um suporte técnico e pedagógico importante no processo de ensino e aprendizagem, muitas vezes sendo a principal fonte de conhecimento para os estudantes e um guia para os professores. Entender como a TD ocorre neste material didático possibilita uma compreensão mais abrangente de como os saberes científicos são apresentados e adaptados para serem compreendidos pelos alunos.

Optamos por explorar o estudo do Cone em nossa pesquisa, pois este tema esteve presente nas atividades do Estágio Supervisionado realizado pela primeira autora durante o ano de 2023, no curso de Licenciatura em Matemática.

Conforme descrito no Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná (Paraná, 2021), é importante trabalhar a geometria espacial com situações práticas, como o volume de embalagens, recipientes, áreas de superfícies para revestimento, entre outras, permitindo que os alunos associem conceitos matemáticos com problemas habituais do cotidiano. Surge, assim, a importância de adotar estratégias de ensino que incentivem os alunos a explorarem e investigarem situações do mundo real. Por essa razão, escolhemos a Modelagem Matemática, buscando compreender elementos da TD no planejamento de uma prática de ensino que envolve o estudo do cone.

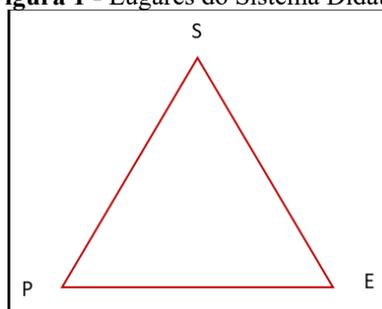
A motivação para a realização desta pesquisa também está relacionada à experiência da primeira autora na preparação da regência de classe. Durante esse processo, ela sentiu-se instigada a introduzir o conteúdo por meio de uma atividade de Modelagem Matemática. A literatura da área da Educação Matemática destaca inúmeras vantagens no uso dessa abordagem (Bassanezi, 2013; Freitas, 2014; Gualandi; Santos Junior; Soares, 2021), por isso, consideramos relevante embasar essa prática na teoria da TD, relacionando os resultados com uma análise do livro didático.

Portanto, esta pesquisa tem por objetivo investigar de que modo os *Atributos* da TD, do saber sábio para o saber a ensinar, são contemplados na introdução do estudo do Cone, em um livro didático do Ensino Médio e no planejamento de uma prática de Modelagem Matemática. Assim, analisamos como o estudo do Cone é apresentado nesses dois contextos de ensino, avaliando se a TD realizada demanda aprimoramento.

2 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA E SEUS ATRIBUTOS

A TD, conforme descrita por Chevallard (1997), estabelece uma relação fundamental entre o professor, os saberes ensinados e os alunos. Esses elementos interagem e influenciam-se no processo de ensino e aprendizagem. Essa interação ocorre dentro de um *sistema didático*, como representado na figura 1.

Figura 1 - Lugares do Sistema Didático



Fonte: Chevallard (1997, p. 26).

O primeiro é o *saber* (S), podemos entendê-lo como o conteúdo que o professor deseja abordar, seja este por meio de conceitos, teorias ou fatos importantes a serem retratados dentro do campo de estudo. O segundo é o *professor* (P), que tem o papel fundamental no *sistema didático*, é por meio do professor que o saber será organizado, selecionado e desenvolvido junto aos estudantes. Já o terceiro se trata dos *alunos* (E), são aqueles que constroem o conhecimento no processo de ensino e aprendizagem. Os estudantes trazem consigo saberes prévios, experiências e compreensões e modos distintos de aprender, o que afeta diretamente no saber;

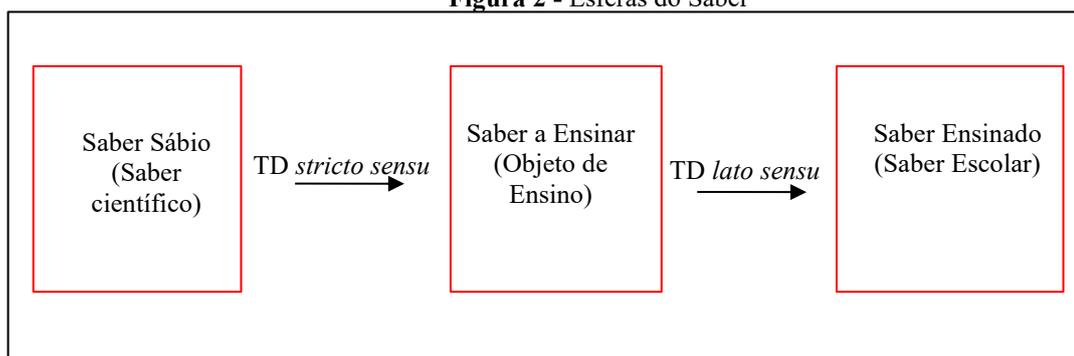
por isso, o professor deve levar esses fatores em consideração e fazer as adaptações necessárias em sua estratégia de ensino.

A TD tem a função de realizar transformações do saber sábio em um saber a ensinar, definido como TD externa (*stricto sensu*), sendo essa a maneira na qual o saber é inserido na escola, sem que sofra muitas simplificações e descontextualizações (Chevallard, 1991, *apud* Frasson, Ranthum, Silva, 2023). Também temos a TD interna (*lato sensu*), que acontece na transposição do saber a ensinar para o saber efetivamente ensinado, por isso também podemos entendê-lo como TD interna, pois se refere transição de conhecimentos que se desenvolve dentro da sala de aula realizado pelos autores do sistema didático, o professor e o aluno (Chevallard, 1991, *apud* Frasson, Ranthum, Silva, 2023).

Chevallard (1997) reconhece a TD como uma ferramenta crucial na Educação Matemática, por meio dela, analisam-se os conhecimentos presentes nas universidades e nas redes de pesquisa (saber sábio) e os transformam em conhecimentos presentes nos livros didáticos (saber a ensinar), que, por sua vez, se tornam o conhecimento encontrado nas salas de aula (saber ensinado). Nesse sentido, Brockington e Pietrocola (2005) denominam essa sequência de "esferas do saber", acompanhando a transformação do conhecimento científico em um conhecimento simplificado.

Podemos representar a Transposição Didática das esferas do saber de acordo com um esquema elaborado por Pereira, Paiva, Freitas (2018):

Figura 2 - Esferas do Saber



Fonte: Pereira, Paiva, Freitas (2018, p.44).

Segundo Pais (2001), o *saber sábio* está associado à vida acadêmica, referindo-se a um saber criado pelas universidades e instituições de pesquisas, logo estão englobados em artigos, teses, livros e relatórios, portanto não está vinculado necessariamente ao ensino básico. Já o *saber a ensinar*, segundo Pais (2001), refere-se aos conteúdos previstos na estrutura curricular escolar das variadas disciplinas, e apresentados em livros didáticos, programas e entre outros materiais de fim didático. Podemos destacar aqui a TD *stricto sensu* entre o *saber sábio* e o

saber a ensinar já colocado em prática, pois a linguagem científica já está transposta em uma linguagem simplificada para ser apresentada nos livros didáticos, e foi desenvolvida uma seleção dos conceitos a serem apresentados. No entanto, o *saber a ensinar* engloba todos os materiais didáticos utilizados como objeto de ensino, no qual o professor organizará uma estruturação do conteúdo para torná-los acessíveis aos alunos.

É por meio da TD *lato sensu* chegamos no *saber ensinado*, que segundo Pais (2001), é aquele que está contido no plano de aula do professor, logo se trata dos objetivos alcançados dentro da sala de aula, que acontece quando o professor consegue fazer com que os alunos se relacionem com os conhecimentos previstos no plano de aula, aqui o professor torna conhecimento científico compreensível e útil aos alunos, dando a liberdade de construir seus próprios conhecimentos e realizar tarefas relacionadas ao conteúdo em questão.

Nessa pesquisa analisamos a TD *strictu sensu* de um conteúdo de Geometria Espacial, do saber sábio para o saber a ensinar, em um livro didático, e no planejamento de uma prática de Modelagem Matemática.

Para que a TD do *saber sábio* para o *saber a ensinar* ocorra de forma satisfatória, Chevallard (1998, *apud* Cirilo, 2008) aponta algumas características e requisitos que devem ser considerados nesse processo. Além disso, a fim de complementar esse quadro, Cirilo (2008) considera algumas regras descritas por Astolfi (1990, *apud* Brockington, Pietrocola, 2005).

Em decorrência desses requisitos, características e regras, Cirilo (2008) elabora o que ela denomina como "*Atributos*" da TD. Eles representam pontos fundamentais a serem considerados ao analisar a TD em livros didáticos e em atividades em diversas perspectivas de ensino. Dessa forma, nessa pesquisa, pretendemos adotar esses *Atributos* como referencial teórico-metodológico para analisar o estudo do cone em um livro didático e no planejamento de uma prática de Modelagem Matemática.

O Atributo I – Adaptação do Saber – contempla a importância da atualização do conteúdo educacional de acordo com as mudanças na sociedade e nas demandas do conhecimento. Assim, envolve a regra I⁴ - *modernizar o saber escolar* (consiste em adaptar continuamente o conteúdo escolar incorporando novos conhecimentos); a regra II - *atualizar o saber a ensinar* (promove a revisão regular do material didático, garantindo a atualização e qualidade do saber a ensinar) e a regra III - *articular o saber "novo" com o "antigo"* (garante a integração coesa dos novos conhecimentos).

⁴ Para saber mais sobre as Regras da Transposição Didática, indicamos o trabalho de Cirilo (2008).

Este atributo também ressalta a importância da característica *ser consensual*, ou seja, ser aceito pela comunidade educacional. Além disso, destaca as *relações de pertinência* que é separada em *pertinência da atualidade moral*, sendo esta a garantia de que o saber está adequado a nossa sociedade, e pela *pertinência de atualidade biológica*, que garante se as informações do conteúdo proposto estão atualizadas.

E é abordado, ainda, o requisito *desincretização do saber* (divisão do conteúdo em partes delimitadas, desenvolvendo uma adaptação do saber para tornar o conteúdo mais acessível aos estudantes). E também possui o requisito da *despersonalização do saber* (que envolve a atualização da linguagem textual para torná-la compreensível, mantendo a relação do conceito com seu contexto histórico).

O Atributo II – Elucidação do Saber – Inclui a regra V, proposta por Astolfi (1990) que enfatiza a necessidade de tornar os conceitos compreensíveis no contexto educacional. Os requisitos de *programabilidade do saber* (definir o saber de maneira a ter uma sequência lógica de desenvolvimento) e *publicidade do saber* (tornar explícita a definição do saber) são mencionados como parte integrante da elucidação do saber. Esses requisitos contribuem para uma apresentação clara e estruturada dos conceitos.

O Atributo III – Operacionalização do Saber – destaca a importância de tornar o conhecimento de ser trabalhado pelos estudantes por meio de atividades práticas, como exercícios, problemas e trabalhos estabelecidos pelo professor. Inclui a regra IV proposta por Astolfi (ANO) que enfatiza a necessidade de *transformar o conhecimento em exercícios e problemas* (ou seja, o saber não apenas seja compreendido teoricamente, mas também aplicado e exercitado na prática).

A característica de *operacionalidade* proposta por Chevallard (1998) ressalta a importância de o saber ser trabalhado por meio de atividades práticas, problemas e outras atividades que permitam aos estudantes aplicarem e mostrar o que aprenderam. Também é abordado neste *Atributo* o requisito *controle social de aprendizagem*, refere-se ao conjunto de meios pelos quais é possível avaliar o conhecimento do estudante.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

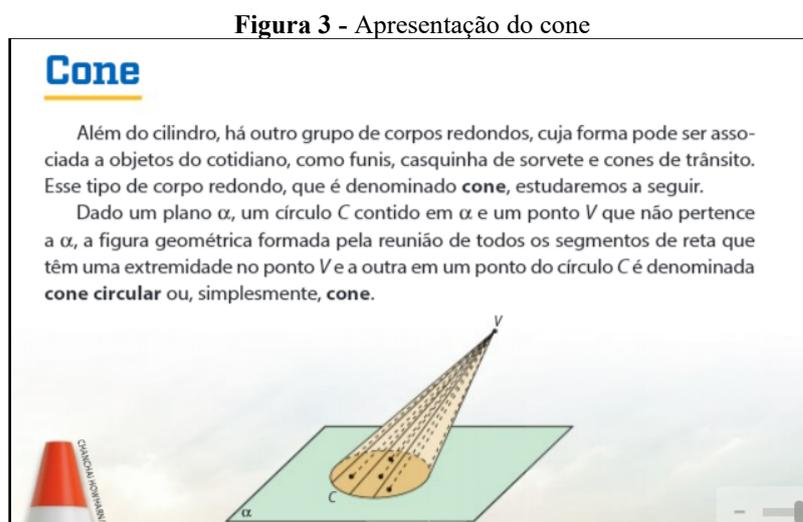
Esta pesquisa é de cunho qualitativo do tipo exploratório, de acordo com a classificação de Gil (2002), uma vez que tem por objetivo esclarecer ideias referentes à TD do estudo de um sólido geométrico: o cone. Para realizar essa investigação foram definidos dois contextos de ensino: um livro didático do Ensino Médio e o planejamento de uma prática de Modelagem Matemática que aborda o conteúdo matemático escolhido.

O livro analisado é dos autores Bonjorno, Júnior e Sousa (2021), que faz parte da coleção PRISMA Matemática, sobre Matemática e suas Tecnologias, cujo volume analisado aborda o campo da Geometria. A razão pela qual selecionamos este livro reside no fato de que esta coleção faz parte do PNLD 2021, e é adotada no Novo Ensino Médio, particularmente na escola em que a primeira autora cumpriu o Estágio Supervisionado do curso de Licenciatura em Matemática. Assim, nossa intenção é examinar como os atributos da TD apontados por Cirilo (2008) são contemplados na apresentação do estudo de cone nesse material didático.

Do mesmo modo, será analisado o planejamento da prática de Modelagem Matemática intitulada: “*Quanto sorvete cabe em uma casquinha?*”, a qual tinha por objetivo desenvolver o conteúdo de volume do cone por meio deste problema.

4 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DO ESTUDO DO CONE NO LIVRO DIDÁTICO

Na Figura 3 apresentamos a introdução do estudo do Cone em um capítulo do livro de Bonjorno, Júnior e Sousa (2021):



Fonte: Bonjorno, Júnior e Sousa (2021, p.118).

Podemos observar, inicialmente na apresentação deste conteúdo (Figura 3), a *desincretização do saber* uma vez que a definição do cone, a apresentação dos elementos e classificação de um Cone são apresentados como uma teoria parcial necessária para introduzir área e volume de um cone. Além disso, os autores complementam essa teoria parcial explicando os tipos de secções de um cone, que agrega ainda mais a *desincretização*.

A *despersonalização do saber* é contemplada parcialmente, pois a apresentação do conteúdo sobre cone está separada de seu contexto histórico e apresenta uma linguagem adaptada ao nível de compreensão dos alunos, complementando-a com ilustrações, conforme

pode ser visto na Figura 3. Além disso é interessante observar a maneira como os autores iniciam a seção do livro relatando objetos do cotidiano que podem ser associadas a um cone, fazendo com que a leitura seja fácil de compreender. Porém, não há relação desse conceito com o contexto histórico no qual foi construído. Por isso, a *despersonalização do saber* é parcial neste conceito.

Parte das atividades e exercícios contemplados no livro são para a consolidação do conhecimento e uma pequena parcela envolve situações hipotéticas do mundo real, nas quais se utiliza a área e volume do Cone. Nas atividades contextualizadas, é possível perceber a preocupação dos autores em tentar aproximar os alunos com a realidade em que estão inseridos. Um exemplo é a atividade que vamos intitular “Canudinho de Doce de Leite”, ilustrada na Figura 4.

Figura 4 – Atividade: Canudinho de Doce de Leite

Volume de um cone

Considere a situação a seguir.

Um doce muito famoso e tradicional no Brasil é o canudinho de doce de leite. Ele consiste em uma massa fina frita em formato que lembra um cone que é recheado com doce de leite cremoso. Exatamente por ser muito famoso, o dono de uma confeitaria decidiu produzir e vender esse doce.

Para determinar quanto de doce de leite seria necessário fazer, é preciso responder duas perguntas: quantas unidades de canudinhos ele pretende produzir por dia e qual a quantidade de doce de leite necessária para preencher cada canudo. Mas como calcular essa quantidade?



■ Cones de sorvete.

PENSE E RESPONDA

Voltando ao problema do recheio de doce de leite, se o dono da doceria fez 800 mL de doce de leite, aproximadamente quantos canudos com 3 cm de diâmetro por 8 cm de altura ele poderá preencher? Saiba que $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$.

42 canudos

Fonte: Bonjorno, Júnior e Sousa (2021, p.122).

Esta atividade serviu como introdução à demonstração da fórmula do volume, destacando a pertinência biológica e a atualização do saber. No entanto, é importante ressaltar que, dentre as atividades apresentadas, apenas esta foi contextualizada de maneira a incentivar uma possível investigação por parte dos alunos. As demais são mais objetivas, resultando em uma abordagem parcial da relação entre a pertinência biológica e a atualização do saber.

A relação de *pertinência moral* aparece neste livro uma vez que há indícios de situações problemas adequados à nossa sociedade, que não têm valor por si só. Por exemplo, temos no exercício 35 (Figura 5) uma situação problema na qual foram apresentadas informações sobre a construção de uma cisterna em uma escola. Esta cisterna tem a forma de um cilindro sobreposto por um cone de base igual, e os autores fornecem informações detalhadas sobre as dimensões, como altura e capacidade, e com base nestas especificações é proposto que os

estudantes elaborem um problema envolvendo a construção desta cisterna na escola. Assim, este exercício dá aos estudantes a oportunidade de aplicar o conceito de cone para fazer o estudo da construção de uma cisterna.

Figura 5 - Exercício 35

35. Cisternas são depósitos que captam e armazenam água da chuva. São muito utilizadas em regiões em que há escassez de água e passaram a ser adotadas também em grandes centros urbanos por causa do racionamento gerado pelos baixos níveis de água das represas. Um modelo de reservatório muito utilizado é formado por um cilindro sobreposto por um cone de mesma base, como é possível ver na figura.



Uma escola pretende construir uma cisterna cujo reservatório terá o mesmo formato do modelo da imagem. Entre as especificações do projeto, a escola decidiu que a cisterna deve ter altura máxima de 4 metros e capacidade para armazenar no mínimo 12 mil litros e no máximo 24 mil litros de água. Elabore um problema envolvendo a construção de uma cisterna que atenda às necessidades e condições dessa escola. *Resposta pessoal.*

Fonte: Bonjorno, Júnior e Sousa (2021, p.125).

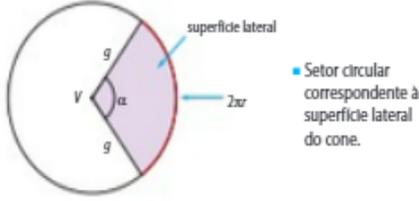
Observa-se que não há sugestões para fazer a utilização de softwares matemáticos ou outros meios tecnológicos como meio didático, mas há dois exercícios que sugerem o uso da calculadora para auxiliar nos cálculos, o que mostra um pouco da *modernização do saber* e *articulação de um novo saber*. Portanto o Atributo I – Adaptação do Saber é parcialmente contemplado.

Podemos analisar que a *programabilidade do saber* é contemplada, pois é nítido que os autores utilizaram uma sequência para apresentar o conteúdo de área e volume do cone, de maneira organizada, criando um tipo de cronograma para facilitar a compreensão do leitor. Podemos observar a definição de um cone no início desta seção e ao decorrer encontramos a definição explícita do conceito de área e volume de um cone, o que garante a *publicidade do saber*. Na página 123, há uma subseção denominada “Atividades Resolvidas”, composta por três exemplos de atividades que envolvem os cálculos da área da superfície e do volume de um cone, o que também torna esses saberes ainda mais *compreensíveis*.

Além disso, na página 121 e 122 os autores trazem a demonstração das fórmulas para o cálculo da área e do volume do cone, respectivamente, o que torna o saber ainda mais *compreensível* (Figura 6).

Figura 6- Demonstração da área e volume do Cone

• **área lateral (S_ℓ):** a área da superfície lateral de um cone corresponde à área de um setor circular de raio g (geratriz do cone) e arco de comprimento $2\pi r$, que é o comprimento da circunferência da base do cone. Atenção: o ângulo central do arco precisa estar em radianos.

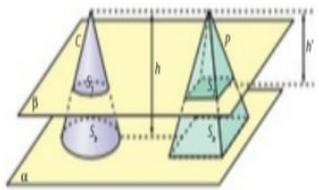


Como a área do setor circular é proporcional ao comprimento do arco correspondente, é possível determinar a área da superfície lateral (S_ℓ) pela regra de três a seguir:

comprimento do arco do setor	área do setor
$2\pi g$	πg^2
$2\pi r$	S_ℓ

$$2\pi r \cdot \pi g^2 = 2\pi g \cdot S_\ell \Rightarrow S_\ell = \frac{2\pi r \cdot \pi g^2}{2\pi g} \Rightarrow S_\ell = \pi r g$$

Sabemos que para pirâmides vale a igualdade $\frac{S_1}{S_b} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$. Prova-se que a relação análoga vale também para cones, ou seja, $\frac{S_1}{S_b} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$. Logo, $\frac{S_1}{S_b} = \frac{S_c}{S_b}$ e, portanto, $S_1 = S_c$.



Assim, pelo princípio de Cavalieri, podemos concluir que o volume da pirâmide P é igual ao volume do cone C e podemos escrever:

$$V_{\text{pirâmide}} = V_{\text{cone}} = \frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

Fonte: Bonjorno, Júnior e Sousa (2021, p.121).

É perceptível que os autores têm a preocupação em tornar o saber *compreensível* ao colocarem o item “Pense e Responda”, que é encontrado em várias etapas da seção e tem como objetivo realizar perguntas que fazem com que o leitor reflita sobre a demonstração realizada, como na Figura 7, contemplando, dessa forma, o Atributo II – Elucidação do saber.

Figura 7 - Exemplo do item “Pense e Responda”

PENSE E RESPONDA

Observando as imagens dadas anteriormente e considerando as fórmulas apresentadas, determine uma fórmula para obter a área total da superfície de um cone reto relacionando o raio da base e a geratriz do cone.

$S_t = \pi r(g + r)$

Fonte: Bonjorno, Júnior e Sousa (2021, p.121).

No fim da seção que aborda o conteúdo de cone no livro, o autor propõe alguns exercícios. São dezessete exercícios, nos quais o estudante deve resolver nove atividades envolvendo a área de um cone, sete atividades envolvendo o volume e traz a atividade 35, já citada anteriormente. No final do livro o autor coloca as respostas de todos os exercícios para futuras conferências. Esta quantidade de exercícios indica a *operacionalização* do conceito de

área e volume de um cone. Além disso, contempla a regra IV proposta por Astolfi (1990) que enfatiza a necessidade de *transformar o conhecimento em exercícios e problemas*, contemplando dessa forma, o Atributo III – Operacionalização do saber.

5 ANÁLISE DO PLANEJAMENTO DA PRÁTICA DE MODELAGEM MATEMÁTICA: QUANTO SORVETE CABE EM UMA CASQUINHA?

A Modelagem Matemática é um processo que envolve a criação de representações matemáticas de fenômenos do mundo real, denominadas modelos matemáticos, que permitem estudar e compreender conteúdos matemáticos, fazer previsões, tomar decisões e resolver problemas práticos de diversas áreas do conhecimento. Podemos entender o modelo matemático como uma representação simplificada de um sistema do mundo real, representado com base em uma estrutura matemática. Esses modelos servem para analisar ou prever situações ou resultados dos fenômenos em questão (Bassanezi, 2013).

Neste sentido, para a condução da atividade de Modelagem Matemática em sala de aula, propomos uma dinâmica descrita por Gualandi, Santos Junior e Soares (2021), em que o processo da Modelagem Matemática é dividido em seis etapas: apresentação do tema; formulação do problema; levantamento e seleção e de dados; resolução de problemas; modelo matemático e a validação; e análise da atividade desenvolvida.

Algumas das etapas da Modelagem Matemática podem ser realizadas previamente pelo professor, antes de propor a atividade, durante o planejamento da aula, ou podem ser realizadas de forma compartilhada, entre alunos e professor, durante a aula. Pinto e Araújo (2021) discutem que, “[...] embora a modelagem admita situações não previstas pelos professores, sendo estas comuns e frequentes no desenvolvimento da atividade em sala de aula, é fundamental que o professor planeje” (p. 5). Esse planejamento pode apoiar o professor na tomada de decisões, na organização de estratégias, na gestão do tempo e no enfrentamento e encaminhamento de discussões que vão ao encontro de dificuldades dos alunos, por exemplo.

Neste trabalho, todas as etapas (exceto a última) foram realizadas previamente, resultando em um plano de aula organizado pela pesquisadora, conforme apresentaremos na sequência.

1ª etapa – Escolha do Tema: A escolha do tema “sorvete” foi feita a partir da definição do conteúdo matemático que se pretendia trabalhar nessa pesquisa, o volume do cone, uma vez que há uma relação entre o formato da casquinha e o cone. Nessa etapa, foi realizada uma busca sobre o tema, e encontramos, no trabalho de Freitas (2014), a atividade que serviu de base, conforme apresentada no Quadro 1:

Quadro 1 - Atividade: Quanto sorvete cabe na casquinha?

História do sorvete:

Você sabia que esta delícia existe há mais de 3.000 anos?

A história começa com os chineses, que misturavam neve com frutas fazendo uma espécie de sorvete. Esta técnica foi passada aos árabes, que logo começaram a fazer caldas geladas chamadas de *sharbet*, e que mais tarde se transformaram nos famosos sorvetes franceses sem leite, os *sorbets*.

Nos banquetes de Alexandre, o Grande, na Grécia, e nas famosas festas gastronômicas do imperador Nero, em Roma, os convidados já degustavam frutas e saladas geladas com neve. O Imperador mandava seus escravos buscarem neve nas montanhas para misturar com mel, polpa ou suco de frutas.

O gelo era estocado em profundos poços construídos pelo povo. Porém, a grande revolução no mundo dos sorvetes aconteceu com Marco Polo que trouxe do Oriente para a Itália, em 1292, o segredo do preparo de sorvetes usando técnicas especiais. Assim a moda dos sorvetes espalhou-se por toda a Itália, e quando Catarina de Medici casou-se na França com o futuro Henrique II, entre as novidades trazidas da Itália para o banquete de casamento, estavam as deliciosas sobremesas geladas, as quais, que encantaram toda a corte.

Mas o grande público francês só teve acesso a estas especialidades um século depois quando Francesco Procópio abriu um café, em Paris, que servia bebidas geladas e sorvete tipo sorbet. Os sorvetes se espalharam por toda Europa e logo chegaram também aos Estados Unidos. A primeira produção de sorvete em escala industrial ocorreu nos Estados Unidos, há cerca de 40 anos. Hoje, no mundo todo, quem mais fabrica sorvete são os norte-americanos.

No Brasil, o sorvete ficou conhecido em 1834, quando dois comerciantes cariocas compraram 217 toneladas de gelo, vindas em um navio norte-americano, e começaram a fabricar sorvetes com frutas brasileiras. Na época, não havia como conservar o sorvete gelado e, por isso, tinha que ser tomado logo após o seu preparo. Um anúncio avisava a hora exata da fabricação. O primeiro anúncio apareceu em São Paulo, no dia 4 de janeiro de 1878, contendo a seguinte mensagem: “SORVETES – Todos os dias às 15 horas, na Rua Direita, nº 44”.

Fonte: Disponível em: <https://www.abis.com.br/voce-conhece-a-historia-do-sorvete>. Acesso em: 28 nov. 2014.

Questão 1: *Como podemos calcular o volume de sorvete que cabe na casquinha, tendo como referência um cilindro de mesma base e mesma altura?*

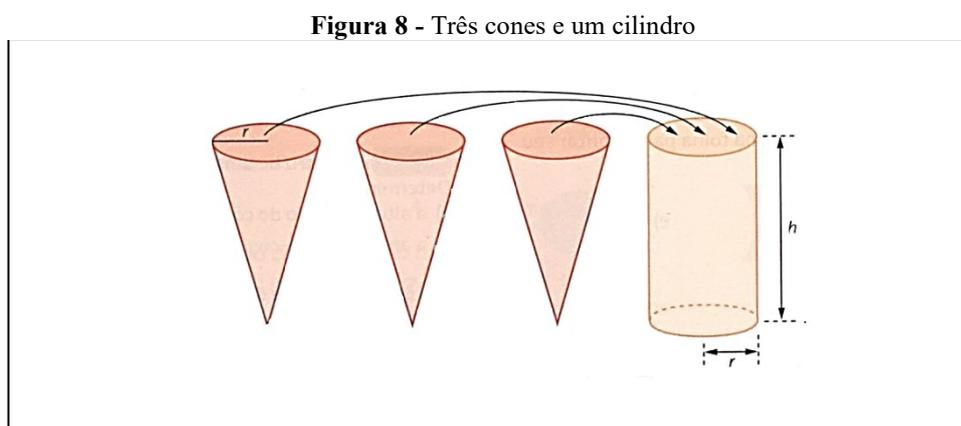
Questão 2: *Quanto sorvete cabe na casquinha?*

Fonte: Adaptado Freitas (2014).

2ª etapa – Apresentação do Tema: o professor poderá apresentar o tema aos alunos por meio de slides no *Educatron*, e realizar questionamentos que despertem o interesse deles sobre o tema abordado, como por exemplo, “Vocês sabiam dessa informação? Qual figura espacial é semelhante à casquinha de sorvete? Onde mais podemos encontrar essa figura geométrica?”

3ª etapa – Formulação do problema: o professor irá propor a Questão 1 mencionada no Quadro 1.

4ª etapa – *Levantamento e seleção e de dados:* O professor estará como mediador, levantando alguns questionamentos que ajudarão os estudantes na seleção e organização de dados para realização da atividade. Sugere-se que a turma seja dividida em grupos e como material didático o professor pode distribuir cilindros e cones e suas planificações feitos de cartolina, juntamente com uma pequena quantia de areia em um recipiente que caiba esses materiais, com o intuito de fazer os alunos observarem que para encher o recipiente cilíndrico com areia é preciso três medidas de areia do cone, o que implica dizer que o volume do cone é um terço do volume do cilindro, conforme ilustrado na Figura 8:

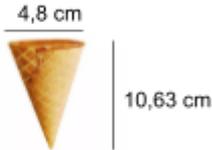


Fonte: Freitas (2014).

5ª etapa – *Resolução do Problema – Modelo Matemático e Validação:* No instante das resoluções, o professor poderá fazer algumas interações com os grupos, questionando os alunos sobre os dados e relações encontradas, bem como se é possível determinar uma fórmula (modelo matemático) que permita calcular o volume do cone. Espera-se que os alunos utilizem a fórmula do volume do cilindro, $V = A_b \cdot h$, onde A_b é a área da base e h a altura do cilindro, para determinar a fórmula do volume do cone: $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$. É importante que o professor discuta com os grupos sobre a aceitação desse modelo, para que possam utilizá-lo na próxima questão.

Depois de determinar o modelo matemático do volume do cone, o professor propõe a Questão 2, exibida no Quadro 1. Neste momento poderá ser entregue a cada aluno uma casquinha de sorvete para que eles verifiquem suas medidas e determinem a sua capacidade. Observe que nesse momento eles tendem a retomar a etapa do levantamento e seleção de dados, em função da entrega de um novo elemento, a casquinha do sorvete. No Quadro 2, apresentamos as medidas da casquinha de sorvete e o cálculo do volume interno da casquinha.

Quadro 2 - Resolução do problema: Quanto sorvete cabe na casquinha?

	Volume interno da Casquinha
Área da Base	$V = (Abh)/3$
$Ab = \pi r^2$	$V = ((18,09) \cdot 10)/3$
$Ab = (3,14) \cdot (2,4)^2$	$V \cong 64,1 \text{ cm}^3$
$Ab = (3,14) \cdot (5,76)$	Como $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$
$Ab \cong 18,09 \text{ cm}^2$	$V \cong 64,1 \text{ ml}$

Fonte: Elaborado pelos autores.

O professor pode estimular os grupos a discutirem internamente sobre o resultado obtido, estimando se ele faz sentido para o problema, na intenção de fazer a validação.

6ª etapa – Análise da Atividade Desenvolvida: Nesta fase os grupos de alunos fazem uma análise sobre o resultado que foi encontrado, e assim devem descrever ou apresentar oralmente o que foi analisado.

A partir desse planejamento, analisamos os *Atributos* da TD que podem ser observados. A utilização da fórmula do volume do cilindro caracteriza a *desincretização do saber*, uma vez que este se encontra como conteúdo parcial utilizado como meio de encontrar a fórmula do volume do cone. A *despersonalização do saber* é contemplada, pois o conceito está separado do contexto histórico, e embora, na atividade não apareça a relação do volume do cone envolvido com seu desenvolvimento histórico, mas o próprio estudante é levado a desenvolver uma fórmula para calcular o volume do cone, e desse modo, a construção deste conhecimento assemelha-se àquela feita pelos cientistas, quando estão criando uma propriedade ou fórmula. Por isso, conseguimos identificar a caracterização da *despersonalização do saber*.

A atividade sugere a utilização de materiais didáticos manipuláveis (os cilindros e cones de cartolina e a areia) o que torna os conceitos matemáticos mais concretos, isto implica na *atualização do saber* e na *articulação de um novo saber*, pois promove um método de ensino diferente daquele que é encontrado nas salas de aula tradicionais, e é promovida por essa circunstância, a busca de um novo saber.

Além disso, esta atividade possui informações adequadas à nossa sociedade e traz, na questão dois, uma situação problema que envolve um objeto de estudo comum no cotidiano dos alunos, a casquinha de sorvete, caracterizando-se a relação de *pertinência de atualidade moral e biológica* respectivamente. Desse modo, parte do Atributo I é contemplado.

A atividade requer uma sequência lógica de conteúdos, pois para desenvolver a primeira questão é necessário que os alunos tenham estudado sobre o volume de um cilindro, assim contemplando a *programabilidade do saber*. A atividade sugere a sistematização do conteúdo do volume do cone, ficando explícito a *publicidade do saber*. Ao desenvolver uma fórmula para o volume do cone, o estudante mobiliza um pré-requisito – o conceito de volume do cilindro –, o que torna o saber mais *compreensível*. Assim, contempla o Atributo II.

Esta atividade de Modelagem Matemática proporciona a exploração do conteúdo do volume de um cone por meio de uma prática, utilizando conhecimentos já abordados em sala de aula. No entanto, a *operacionalização do saber* é limitada, uma vez que a atividade concentra-se na resolução de uma situação-problema específica relacionada ao cálculo do volume de uma casquinha de sorvete, sem incluir outros exercícios ou problemas que abordam outras estratégias para calcular o volume de um cone. Portanto, contempla parcialmente o Atributo III.

6 ANÁLISE GERAL DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Nesta análise geral dos atributos podemos observar que o livro didático contempla parcialmente o Atributo I – adaptação do saber, promovendo parcialmente a articulação de um novo saber com um antigo, a modernização do saber, a abordagem para a pertinência da atualidade biológica e a atualização do saber. Por outro lado, contempla a desincretização do saber, a característica consensual e a pertinência à atualidade moral.

Já o Atributo II – elucidação do saber, é contemplado, garantindo a programabilidade do saber, a publicidade do saber e tornando o saber compreensível. O Atributo III - operacionalização do saber também é contemplado, em que é possível observar o requisito do controle social da aprendizagem, a operacionalização do conhecimento e transformação do conhecimento em exercícios e problemas.

A prática de Modelagem Matemática abrange boa parte do Atributo I – adaptação do saber, com exceção da regra de modernização do saber. Temos assim que a desincretização do saber, a despersonalização do saber, a pertinência moral e biológica, a atualização e a articulação do saber são observadas. O Atributo II – elucidação do saber também é contemplado

na prática de Modelagem Matemática, garantindo a programabilidade do saber, a publicidade do saber e a regra de tornar o saber compreensível.

Já o Atributo III – operacionalização do saber é parcialmente contemplado, pois abrange de forma parcial a característica de operacionalidade do saber. No entanto, é possível observar a regra IV, que enfatiza a necessidade de transformar o conhecimento em exercícios e problemas e o requisito do controle social da aprendizagem.

Com isso, concluímos que a prática de Modelagem Matemática analisada representa uma forma de complementar o livro didático nos atributos que são parcialmente contemplados neste contexto, constituindo-se, assim, em uma estratégia de ensino relevante para a TD do estudo do Cone.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho nos propomos a investigar de que modo os *Atributos* da TD, do saber sábio para o saber a ensinar, são contemplados na introdução do estudo do Cone, em um livro didático do Ensino Médio e no planejamento de uma prática de Modelagem Matemática.

Cirilo (2008) elaborou estes *atributos* de acordo com Chevallard (1998) e Astolfi (2005), envolvendo regras, requisitos e características, essenciais para observar se a TD do saber sábio para o saber a ensinar é adequada ou precisa de aprimoramentos, e fez uma análise de um livro didático voltado para o Ensino Superior, no qual analisou o desenvolvimento do conteúdo de Integrais, da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, além de algumas atividades de Modelagem Matemática que abordam este conteúdo.

Na presente pesquisa analisamos esses *atributos* em contextos de ensino voltados para o Ensino Médio e, considerando que os alunos deste nível de ensino, enquanto constituinte de um sistema didático, influenciam o processo de TD, consideramos relevante a realização desta pesquisa.

Para nossa análise selecionamos um livro didático do Novo Ensino Médio, que nos mostrou ter algumas vantagens, quando comparado ao livro do Ensino Superior analisado por Cirilo (2008), destacando-se no atributo I as relações de pertinência em relação à atualidade moral e biológica, presentes em algumas atividades práticas propostas para a sala de aula.

No livro analisado, também destaca-se, no Atributo III, a operacionalização do saber, trazendo diferentes problemas e exercícios para serem trabalhados em sala de aula. Contudo, é necessário observar que a maioria deles envolve situações fictícias do mundo real e não são suficientes para promover a investigação por parte do aluno, o que torna os conceitos menos compreensíveis do que na prática de Modelagem Matemática, em que o estudante tem a

oportunidade de utilizar seus conhecimentos prévios na construção de um novo saber. Porém, a prática de Modelagem Matemática tem pouca capacidade de operacionalização, sendo necessário adicionar outros tipos de atividades.

Neste contexto, obtemos conclusões semelhantes às de Cirilo (2008), isto é, que o livro didático é importante para dar suporte técnico e fonte de conhecimento e a prática de Modelagem Matemática é necessária para que os estudantes consigam aplicar a matemática no ambiente em que vivem. No livro analisado encontramos duas atividades práticas (Figuras 5 e 6) que se assemelham a uma atividade de Modelagem Matemática, especialmente nas relações de pertinência à atualidade moral e biológica contudo, cabe ao professor fazer todo um processo de mediação, necessário para que a Transposição Didática aconteça de forma satisfatória.

Desta maneira podemos dizer que a prática de Modelagem Matemática analisada complementa a TD apresentada no livro didático ao oferecer uma abordagem prática e contextualizada, estimulando a investigação e a descoberta por parte dos alunos. Enquanto o livro tende a apresentar conhecimento de forma mais teórica, a prática de Modelagem Matemática envolve os estudantes em situações-problema do cotidiano, promovendo a aplicação prática dos conceitos e aproximando-os do processo de construção do conhecimento científico. Além disso, a prática de Modelagem Matemática possibilita uma avaliação mais integrada e abrangente, enquanto o livro muitas vezes se limita a exercícios convencionais, contribuindo para uma experiência de aprendizado mais dinâmica e inovadora.

Portanto, recomendamos as práticas de Modelagem Matemática para a introdução de um conteúdo, para que a partir de seu desenvolvimento o aluno comece a obter noções do novo conhecimento e utilize o livro didático como meio de tornar este conhecimento mais compreensível e operacionalizável.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2009.

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, José Ruy Giovanni; SOUSA, Paulo Roberto Câmara. **Matemática: Geometria**. São Paulo: Editora FTD, 2020, p. 118-125.

BROCKINGTON, Guilherme; PIETROCOLA, Maurício. Serão as Regras da Transposição Didática Aplicáveis aos Conceitos de Física Moderna? **Investigações em Ensino de Ciências**, v.10, n. 3, dez. 2005.

CIRILO, Kassiana Schmidt Surjus. **Livros Didáticos e Modelagem Matemática: Uma Caracterização da Transposição Didática do Conteúdo de Integral Nestes Ambientes**. 2008.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

CHEVALLARD, Y. **La Transposición Didáctica**: del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique Grupo Editor AS, 1991.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: Uma análise da influência francesa. Belo Horizonte, 2001.

FRASSON, Antonio Carlos; RANTHUM, Rogério; SILVA, Edson Armando. O processo da transposição didática, suas fases e suas nuances até o desenvolvimento dos materiais didáticos. **Boletim de Conjuntura**, Boa Vista, v. 14, n. 41, p. 235-238, 2023. Disponível em: <https://revista.ioles.com.br/boca/index.php/revista/article/view/1322/671>. Acesso em: 1 maio 2023.

FREITAS, Josianny Humai Mauricio. **Modelagem matemática como estratégia metodológica no ensino de geometria**. Apucarana: PDE, 2014.

FREITAS, Rony Cláudio de Oliveira; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela; PEREIRA, Rúbia Carla. A transposição didática na perspectiva do saber e da formação do professor de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 1, p. 44, 2018.

GUALANDI, Jorge Henrique; SANTOS JUNIOR, Guataçara dos; SOARES, Maria Rosana. Modelagem matemática em educação matemática: possibilidades para os processos de ensino e de aprendizagem. **Revista Dynamis**, Blumenau, v. 27, n. 1, p. 3-25, 2021. Disponível em: <https://bu.furb.br/dynamis/article/viewFile>. Acesso em: 1 maio 2023.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação e do Esporte. **Referencial curricular para o ensino médio do Paraná**. Curitiba: SEED/PR, 2021.

PINTO, Thais Fernanda; ARAÚJO, Jussara de Loiola. Um estudo sobre planos de atividades de modelagem matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 12, n. 2, p. 1-25, 2021.

CAPÍTULO IV

MODELAGEM MATEMÁTICA E BEM-ESTAR DIGITAL: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE ESTATÍSTICA

DOI: 10.51859/ampla.epm963.1125-4

Ludiely da Silva de Oliveira
oliveiraludiely@gmail.com

Wilian Barbosa Travassos
wilian.travassos@uenp.edu.br

Marcos Vinicius de Oliveira Peres
mvoperes@uem.br

Cintia Cristiane de Andrade
andrade-cintia@hotmail.com

Láís Maria Costa Pires de Oliveira
laismariaa@gmail.com

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta de sequência didática fundamentada na Modelagem Matemática, com o objetivo de ensinar conceitos de estatística descritiva — média, moda e mediana — a estudantes do Ensino Médio. A proposta articula o conteúdo matemático ao contexto do bem-estar digital, por meio da análise do tempo de uso de aplicativos em dispositivos móveis pelos próprios alunos. A partir da coleta, organização e interpretação de dados reais, os estudantes são incentivados a refletir criticamente sobre seus hábitos digitais, desenvolvendo competências analíticas e promovendo a aprendizagem significativa dos conceitos estatísticos. Alinhada às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a abordagem busca integrar teoria e prática, contribuindo para a formação integral dos alunos ao associar o ensino da estatística à vivência cotidiana e ao uso consciente da tecnologia. Espera-se que esta proposta possa inspirar (futuros) professores no desenvolvimento de aulas assentes na Modelagem Matemática, como alternativa às aulas expositivas.

Palavras-chave: Educação Estatística. Hábitos Digitais Saudáveis. Estatística Descritiva. Sequência didática.

1 INTRODUÇÃO

Os documentos oficiais brasileiros, como a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), destacam a importância do ensino de estatística no Ensino Médio, reconhecendo-o como fundamental para o desenvolvimento do pensamento crítico e da capacidade de análise de informações. A Estatística aparece como parte integrante da área de Matemática e suas Tecnologias, sendo essencial para que os estudantes compreendam e interpretem o mundo ao seu redor.

A BNCC (Brasil, 2018) enfatiza que o ensino de conceitos como média, moda e mediana deve ir além de cálculos mecânicos, promovendo uma compreensão significativa desses indicadores. Os estudantes são incentivados a analisar e interpretar dados em diferentes contextos, como em gráficos, tabelas e situações práticas do cotidiano. Esse aprendizado contribui para a tomada de decisões informadas e o desenvolvimento de habilidades como a leitura crítica de dados apresentados em notícias, pesquisas e no mercado de trabalho.

Os documentos também sugerem que o ensino desses conceitos seja contextualizado, utilizando-se de problemas reais para engajar os alunos e facilitar a aplicação prática dos conhecimentos. Além disso, destacam a importância de integrar tecnologias no processo de ensino, utilizando ferramentas digitais para organizar e representar dados de maneira eficiente.

Nesse sentido, a Modelagem Matemática se destaca como uma das abordagens para o ensino de estatística, no contexto de conceitos como média, moda e mediana. De acordo com Barbosa (2011), a Modelagem Matemática cria um ambiente de aprendizagem em que os alunos são incentivados a problematizar e investigar situações do cotidiano por meio da matemática. Assim, essa abordagem permite que os alunos aprendam por meio da resolução de problemas reais, conectando os conceitos estatísticos a situações práticas e relevantes do cotidiano.

Ao utilizar a Modelagem Matemática, os estudantes são incentivados a identificar problemas em contextos diversos, como dados socioeconômicos, análises de mercado financeiro, estudos ambientais etc. Nesse processo, os alunos coletam, organizam e analisam dados, aplicando conceitos como média, moda e mediana para interpretar informações e tomar decisões baseadas em evidências. Esse contexto torna o aprendizado mais significativo, pois os alunos compreendem a utilidade da estatística como ferramenta para resolver problemas do mundo real.

Levando em consideração as salas de aula brasileiras, nota-se que muitos educadores enfrentam desafios ao implementar abordagens como a Modelagem Matemática, especialmente quando não têm diretrizes práticas que os ajudem a conectar os conteúdos teóricos com

problemas do mundo real. Nesse sentido, a construção de uma sequência didática bem planejada organiza o ensino em etapas progressivas, orientando o professor desde a introdução ao tema até a aplicação prática.

Para Zabala (1998, p. 18, grifo do autor), sequência didática é “[...] *um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos*”. No caso do ensino de média, moda e mediana por meio da Modelagem Matemática, a sequência didática pode começar com a contextualização de situações reais. Em seguida, os alunos podem ser guiados pelo professor na coleta, organização e representação dos dados, culminando na interpretação e reflexão sobre os resultados obtidos.

Assim, nesta pesquisa, consideramos trabalhar com alguns aspectos sociais, como a crescente utilização de aplicativos de redes sociais por alunos, assim como uma reflexão sobre o possível impacto que isso pode causar no desempenho escolar. Nesse sentido, a Modelagem Matemática pode servir como uma abordagem não apenas para ensinar os conceitos, mas para analisar e interpretar dados coletados de maneira crítica e reflexiva.

Dessa forma, o problema central deste estudo é compreender como promover a aprendizagem dos conceitos estatísticos de média, moda e mediana no Ensino Médio, por meio da Modelagem Matemática, em um contexto que também favoreça a reflexão crítica sobre o uso da tecnologia e o bem-estar digital dos alunos.

Para tanto, a presente pesquisa propõe uma sequência didática voltada ao ensino dos conceitos de estatística, quais sejam, média, moda e mediana, explorando o uso de aplicativos disponíveis em dispositivos Android e iOS, que monitoram o tempo diário gasto pelos usuários em redes sociais.

Assim, espera-se que os alunos não apenas aprendam conceitos estatísticos, mas também se tornem mais conscientes sobre o impacto das tecnologias em suas vidas, tornando a experiência de aprendizado mais relevante e conectada à sua realidade.

2 BEM-ESTAR DIGITAL

Segundo a pesquisa de Dino e Costa (2021, p. 26), baseada em dados do Comitê Gestor da Internet no Brasil, "crianças e adolescentes estão entre os grupos de indivíduos com maiores proporções de usuários de Internet. No Brasil, 90% da população de 10 a 15 anos e 97% da população de 16 a 24 anos é usuária de Internet". Esse cenário reforça a necessidade de controlar o tempo de tela no dia a dia, especialmente entre jovens, como forma de promover o bem-estar digital e prevenir problemas mentais e psicológicos.

O uso excessivo de dispositivos pode desencadear uma série de impactos negativos, como ansiedade, estresse, fadiga mental e dificuldade de concentração. Além disso, a exposição prolongada à luz azul emitida por telas, particularmente antes de dormir, interfere na produção de melatonina, prejudicando o sono e contribuindo para o cansaço crônico, o que, por sua vez, compromete a saúde mental.

Outro fator importante é o efeito emocional do uso desregulado das redes sociais, que frequentemente estimula comparações sociais e a busca por validação, resultando em baixa autoestima e sentimentos de inadequação. Ao mesmo tempo, passar muitas horas conectado pode levar ao isolamento social, à negligência de atividades *offline*, como interações pessoais, exercícios físicos e *hobbies*, e até mesmo à dependência digital, que prejudica a qualidade de vida (Souza, 2020).

Assim, a proposta desta pesquisa visa integrar a Modelagem Matemática com questões contemporâneas, como o bem-estar digital, oferecendo a professores e futuros professores uma sequência didática que proporciona um espaço para aplicar e construir o conhecimento matemático de forma prática e reflexiva.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática é uma abordagem pedagógica que se propõe a integrar a matemática ao cotidiano dos alunos. Ela é ampla e aplicável em diversos campos de estudo, como Física, Biologia, Química, Engenharia e Economia, e visa envolver os estudantes com/em situações-problema que despertem seu interesse pela matemática.

De acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012), a Modelagem Matemática pode ser compreendida como um processo que envolve uma situação inicial (problemática) e uma situação final desejada, que representa uma solução para a situação inicial. Este processo requer a utilização de conceitos e procedimentos matemáticos, ancorados na realidade, permitindo que conhecimentos matemáticos e não matemáticos sejam acionados e integrados. Essa relação entre a realidade e a matemática é fundamental para a construção de modelos matemáticos eficazes.

Os procedimentos necessários para o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática podem ser organizados em quatro etapas principais, conforme Almeida, Silva e Vertuan (2012), as quais incluem: Interação; Matematização; Resolução; e Interpretação de resultados e validação. A seguir, caracterizamos cada uma delas.

Interação: Nesta primeira etapa, os alunos têm seu primeiro contato com a situação-problema e a discussão sobre o tema em questão. É essencial que os objetivos sejam claramente

definidos, incluindo a identificação das questões específicas que se pretende resolver e as informações necessárias para alcançar esses objetivos.

Matematização: A segunda etapa envolve a transformação de uma representação em linguagem natural para uma representação em linguagem matemática. Isso implica a formulação clara do problema, a seleção de variáveis relevantes e a definição das relações entre elas. As simplificações e as hipóteses formuladas nesta etapa são cruciais para a construção do modelo.

Resolução: Na terceira etapa, os alunos buscam responder às questões formuladas a partir do tema investigado. Essa fase demanda a aplicação de raciocínio lógico e a utilização de técnicas matemáticas adequadas para resolver o problema proposto.

Interpretação de resultados e validação: A última etapa consiste em avaliar os resultados obtidos. Os alunos devem validar a representação matemática em relação à situação real, considerando tanto os procedimentos matemáticos utilizados quanto a adequação do modelo à realidade analisada. Essa fase é fundamental para desenvolver a capacidade dos alunos de avaliar o processo de construção de modelos e suas diversas aplicações.

Vertuan e Almeida (2016) ressaltam que a dinâmica da atividade e o contexto em que ela é realizada influenciam a ordem e o tempo dedicados a cada uma das fases da Modelagem Matemática, além de permitir revisitações sempre que necessário.

Assim, no presente estudo, a Modelagem Matemática será utilizada como uma ferramenta para que os alunos compreendam os conceitos de média aritmética, moda e mediana a partir dos dados gerados no aplicativo “Saúde Digital/Bem-Estar Digital” presente nos celulares de cada aluno. Por meio da aplicação dos conceitos de média, moda e mediana, os alunos poderão desenvolver uma compreensão mais profunda do impacto das tecnologias em suas vidas, promovendo uma reflexão crítica sobre seus hábitos digitais.

4 INTRODUÇÃO À ESTATÍSTICA – MÉDIA MODA E MEDIANA

Estatística é a ciência que coleta, organiza, analisa, interpreta e apresenta dados, com o objetivo de auxiliar na tomada de decisões e na compreensão de fenômenos em diferentes áreas do conhecimento. A sua importância abrange muitos campos, como as ciências sociais, a economia, a biologia e a saúde, fornecendo ferramentas essenciais para a tomada de decisões informadas.

Existem duas principais ramificações na Estatística: a Estatística Descritiva, que resume e descreve as características dos dados, e a Estatística Inferencial, que utiliza amostras para tirar conclusões baseadas em métodos probabilísticos sobre populações maiores. Na estatística

descritiva, as medidas de tendência central como média, moda e mediana desempenham um papel essencial, oferecendo uma compreensão mais profunda dos fenômenos estudados.

Com relação à **Média Aritmética**, ela é definida como a soma de todos os valores de um conjunto, dividida pelo número total de elementos do conjunto. É uma medida que oferece uma visão geral do comportamento dos dados, sendo amplamente utilizada em diversas áreas. A média pode ser influenciada por *outliers*, ou seja, um valor que se distingue significativamente dos demais em um conjunto de dados, o que significa que valores extremos podem distorcer o resultado. Por exemplo, em uma sala de aula onde a maioria dos alunos estuda 2 horas por dia, um aluno que estuda 10 horas pode aumentar a média significativamente.

A fórmula da média aritmética é dada por:

$$\text{Média Aritmética} = \frac{\text{soma dos valores}}{\text{número total de valores}}$$

Um exemplo: A professora de biologia deu uma nova chance para os dois alunos que tiveram notas abaixo de 6. Esses alunos fizeram uma nova prova e as notas foram 7 e 6,5. Levando em consideração que as notas dos outros alunos foram: 10, 9, 9, 8, 7, 7, 7, 6, calcule a nova média da turma.

Resolução: A nova média da turma é dada por \bar{x} , onde \bar{x} representa a média aritmética

$$\bar{x} = \frac{10 + 9 + 9 + 8 + 7 + 7 + 7 + 6 + 7 + 6,5}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{76,5}{10}$$

$$\bar{x} = 7,65$$

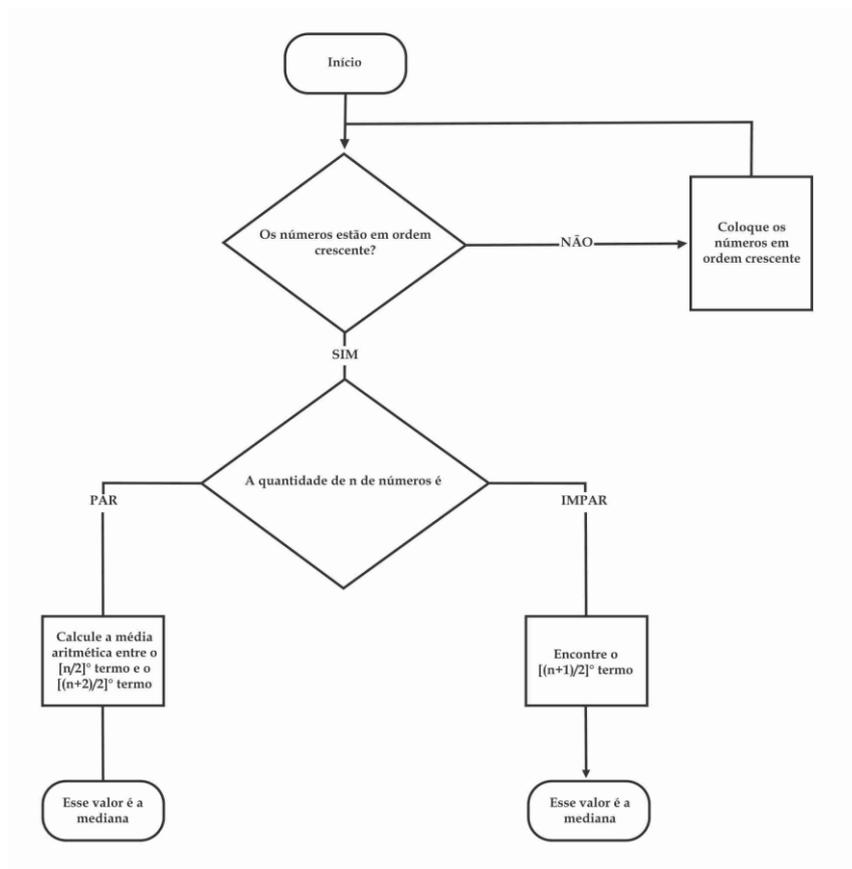
Quanto à **Moda**, ela está relacionada à frequência dos valores. É considerado moda um valor que ocorre mais vezes do que os outros, e é especialmente útil em análises de dados qualitativos ou categóricos. Um conjunto de dados pode ter uma ou mais modas. Logo, as classificações de moda são: (i) Unimodal: Quando há um único valor que se repete com mais frequência; (ii) Bimodal: Quando existem duas modas distintas; (iii) Multimodal: Quando há mais de duas modas; (iv) Amodal: Se todos os valores aparecem com a mesma frequência ou distintos entre si, então não há moda.

Um exemplo: Analisando o exemplo da média aritmética anterior, a moda será a nota 7,0, pois quatro alunos obtiveram essa nota, tornando-a a mais frequente na turma. Com isso, será classificado como unimodal.

Já a **Mediana** representa o valor que divide um conjunto de dados ordenado em duas partes iguais. Essa medida é especialmente útil por fornecer uma ideia clara do ponto central de uma distribuição, sendo menos influenciada por valores extremos ou variações significativas na média.

Quando o conjunto de dados possui um número ímpar de elementos, a mediana é o valor central. Por exemplo, no conjunto {1, 2, 3, 4, 5}, a mediana é 3. Já em conjuntos com um número par de elementos, a mediana é obtida calculando a média dos dois valores centrais. Por exemplo, no conjunto {1, 2, 3, 4}, a mediana é $\frac{(2+3)}{2}$, resultando em 2,5.

Figura 1 - Esquema para calcular a mediana.



Fonte: Bueno, Gabriel e Junior (2019, p. 8)

Além disso, mesmo em situações em que não possuímos dados quantitativos, é possível calcular a mediana utilizando métodos específicos para identificar o ponto central da distribuição.

Essas três medidas de tendência central – média, moda e mediana – serão exploradas na sequência didática proposta, permitindo aos alunos aplicarem esses conceitos na análise de dados reais relacionados ao tempo gasto em aplicativos de redes sociais. Por meio da Modelagem Matemática, os alunos terão a oportunidade de entender e interpretar esses conceitos de forma prática e contextualizada, promovendo a aprendizagem e a reflexão.

5 METODOLOGIA

Este estudo caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa (Gil, 2008) de natureza aplicada, com enfoque exploratório e interventivo, voltado ao desenvolvimento de uma proposta pedagógica para o ensino de estatística por meio da Modelagem Matemática. A proposta centra-se na construção e aplicação de uma sequência didática direcionada a estudantes do Ensino Médio, tendo como foco o ensino dos conceitos de média, moda e mediana.

A metodologia adotada tem como objetivo integrar o conteúdo matemático a um tema socialmente relevante — o bem-estar digital —, a partir da análise de dados reais coletados pelos próprios alunos, referentes ao tempo de uso de aplicativos em seus dispositivos móveis. A abordagem adotada busca promover não apenas a aprendizagem de conteúdos matemáticos, mas também o desenvolvimento de uma postura crítica em relação ao uso da tecnologia no cotidiano dos estudantes.

A sequência didática foi planejada com base nos pressupostos da Modelagem Matemática como estratégia de ensino, fundamentada em autores como Almeida, Silva e Vertuan (2012) e Zabala (1998). As etapas foram organizadas para favorecer a aprendizagem e a reflexão crítica, conforme descrito a seguir.

5.1 Etapas da sequência didática

5.1.1 Apresentação do Tema (Aula 1)

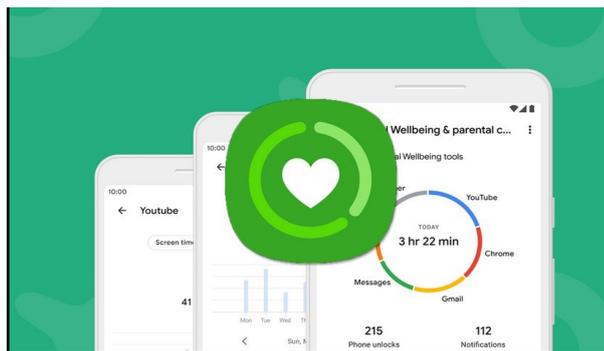
Objetivo: Explorar o conceito de saúde digital/bem-estar digital e a importância do uso consciente da tecnologia através de uma prática com Modelagem Matemática, a fim de sistematizar o conceito de média, moda e mediana, por meio de uma coleta e análise de dados reais.

Interação: Na primeira aula, será realizado um bate papo com os alunos a fim de fazer o primeiro contato com o tema escolhido para a atividade. Neste bate papo, serão feitos alguns questionamentos como:

- Quanto tempo, em média, vocês utilizam o celular por dia?
- Quais aplicativos vocês mais usam durante esse tempo?
- Quais são os benefícios desses aplicativos para a saúde de vocês?
- Será que existe algum aplicativo que conseguimos monitorar o tempo que passamos no celular?

Atividades: Em seguida, serão apresentados aos alunos, por meio de slides, alguns aplicativos que podem ser utilizados para monitorar o tempo de uso dos celulares, demonstrando como esses aplicativos podem ajudar a acompanhar e analisar o uso diário.

Figura 2 - Aplicativo de monitoramento para Android: Bem-estar Digital



Fonte: TudoCelular (2023)

Figura 3 - Aplicativo de monitoramento para iOS: Tempo de Uso



Fonte: Oficinadanet (2018)

5.1.2 Coleta de Dados (Aula 2)

Objetivo: Nesta aula será estabelecido um bate-papo com os alunos levando em consideração a importância de monitorar o tempo de uso do celular, incentivando-os a refletirem sobre como o uso excessivo pode afetar sua saúde física, mental e o desempenho escolar. Assim, os alunos serão orientados a coletar o tempo de uso diário e dados relevantes sobre o uso de aplicativos nos seus aparelhos celulares.

Atividades:

1 - Introdução e Orientações: Os alunos serão orientados a baixarem em seus celulares um aplicativo de monitoramento de tempo (como o "Bem-estar Digital" para Android ou "Tempo de Uso" para iOS, caso os respectivos celulares não tenham), caso já possuam o aplicativo, eles serão orientados apenas a configurar para iniciar o monitoramento.

2 - Desafio de Monitoramento: os alunos serão orientados a registrarem diariamente, durante uma semana, o tempo gasto em diferentes aplicativos (redes sociais, jogos etc.). Essa será assumida como sendo a hipótese simplificadora do fenômeno analisado. Durante a coleta de dados, os alunos deverão analisar os seguintes pontos:

- Quantas horas por dia vocês utilizam os aparelhos celulares?
- Quais aplicativos consomem mais tempo?

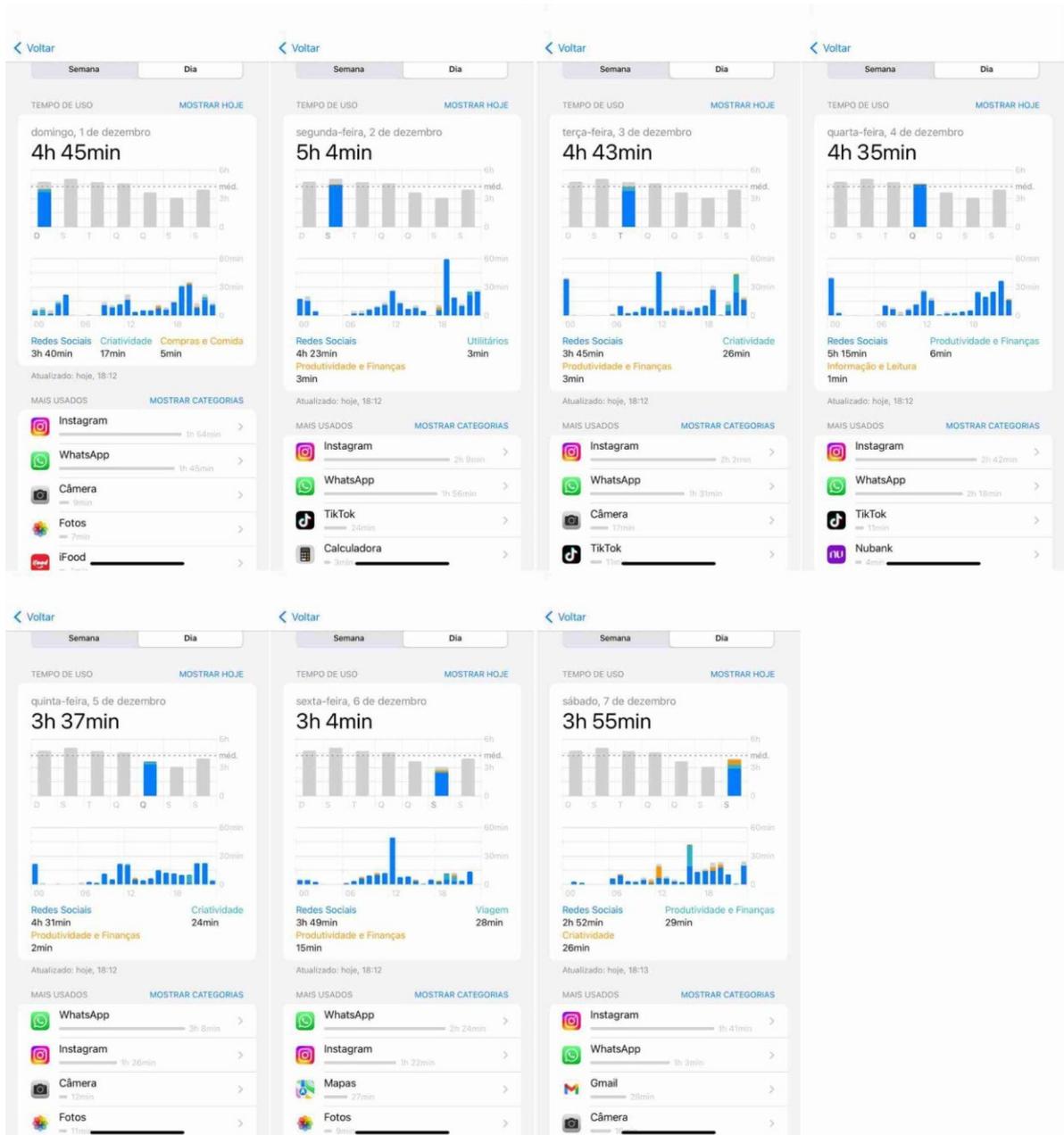
Após a semana de coleta, os alunos compartilharão seus dados em sala de aula (caso não apresentem resistência em relação a isso).

5.1.3 Matematização (Aula 3)

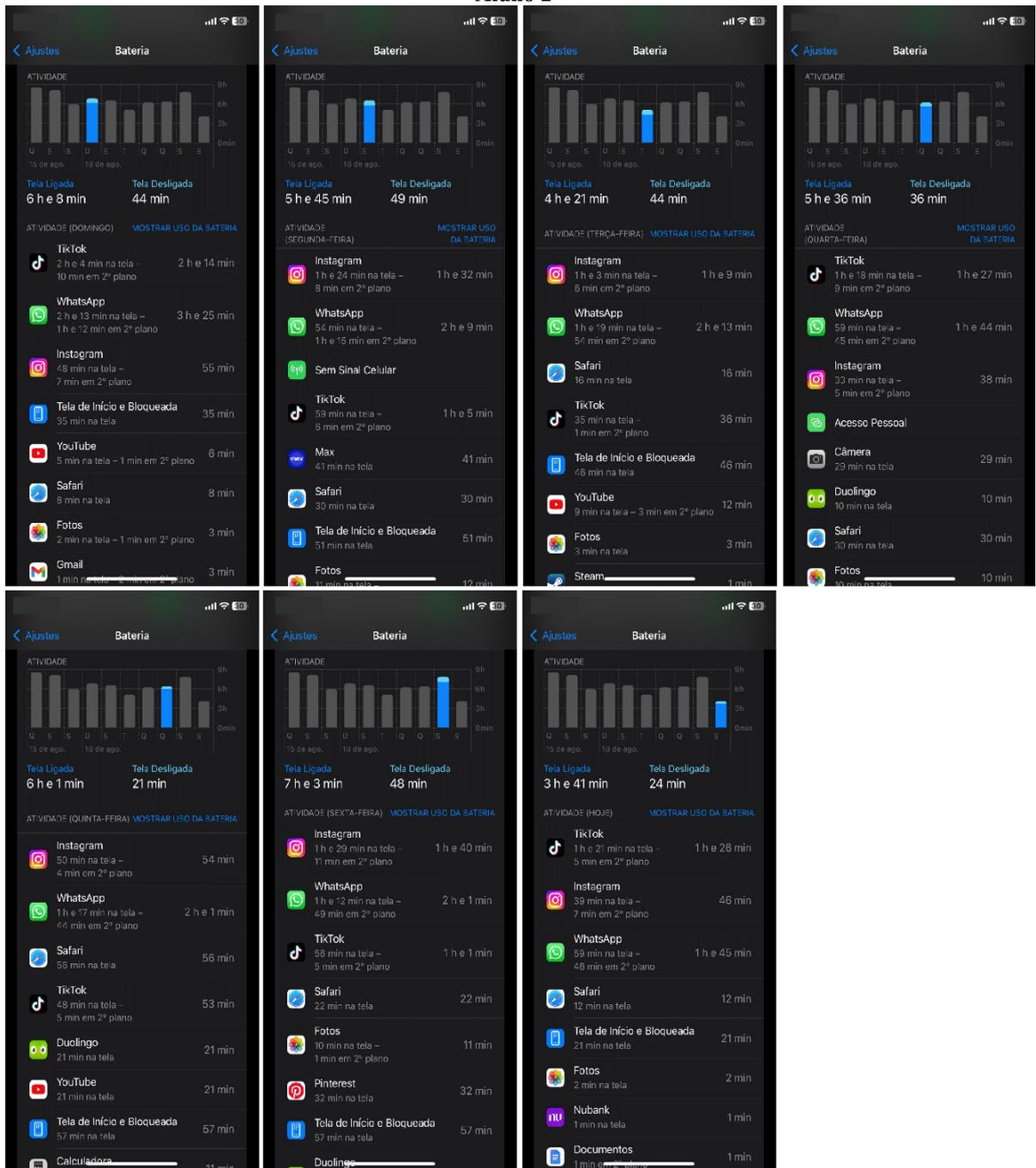
Para exemplificar, utilizaremos os dados coletados de acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Pública do Estado do Paraná. Foram coletados dados de 5 alunos com faixa etária de 21 a 23 anos, durante uma semana. A seguir, apresentamos o exemplo de como pode ser desenvolvida a análise e Modelagem de dados com os alunos.

Figura 4 - Dados dos alunos

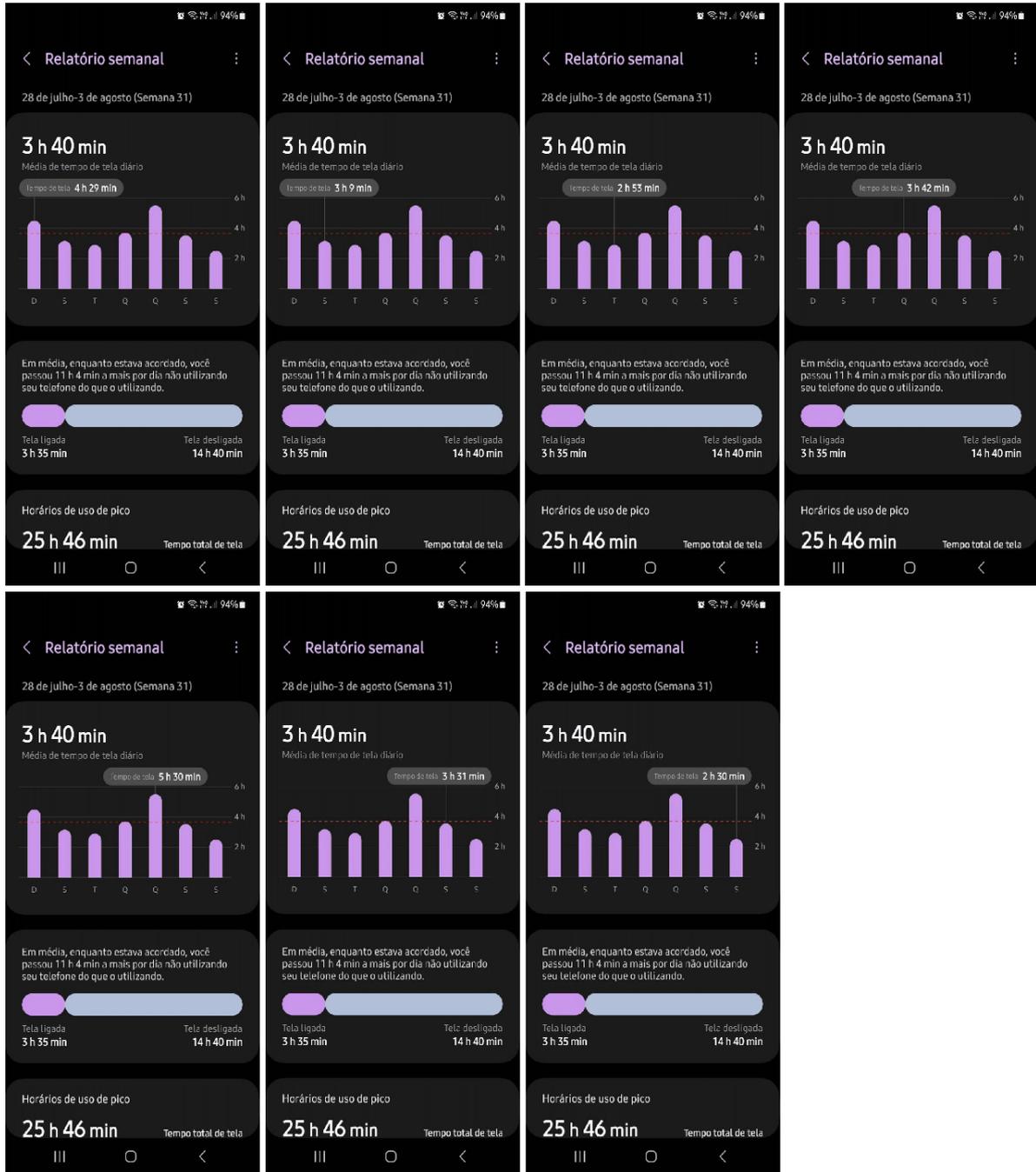
Aluno 1



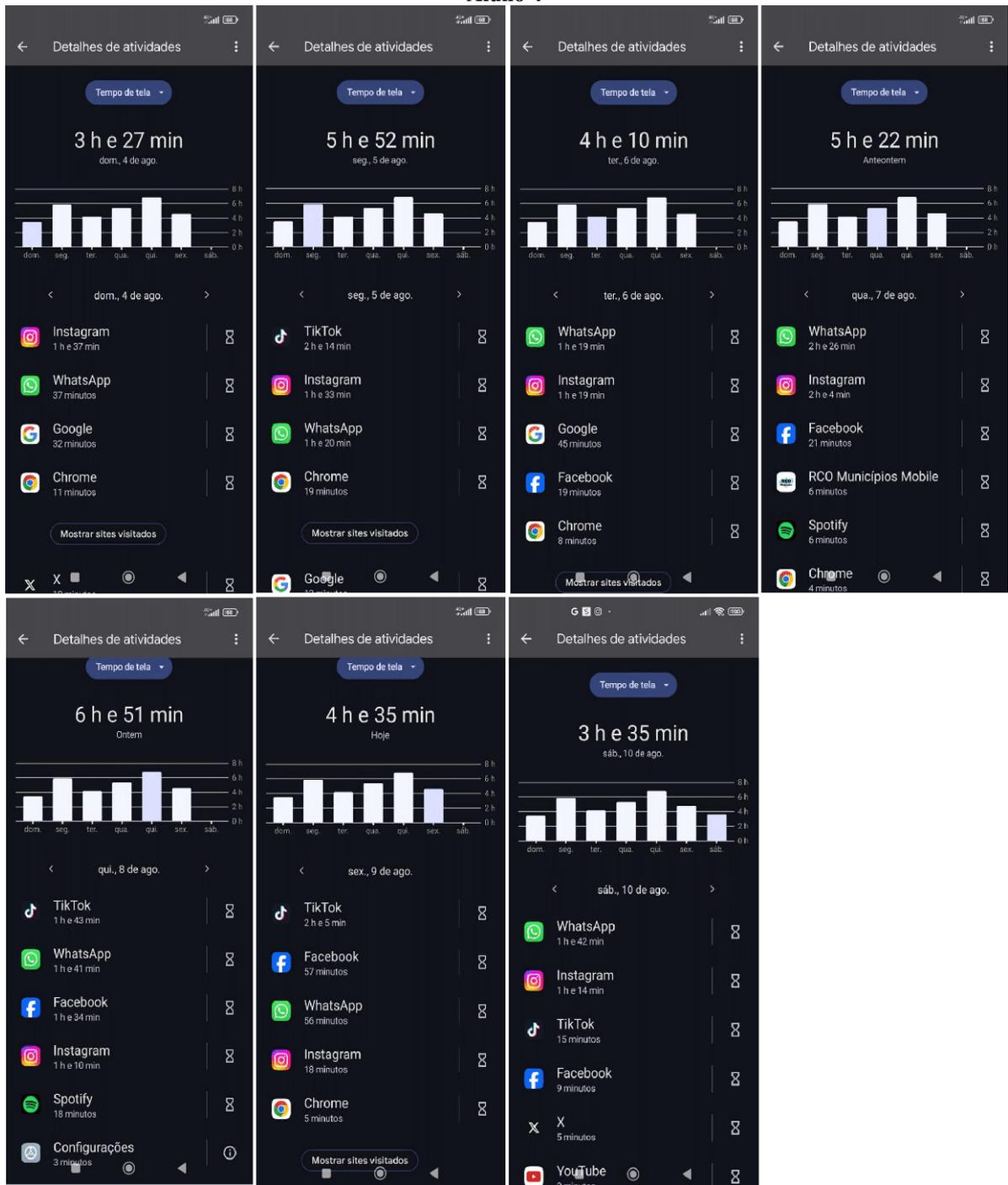
Aluno 2



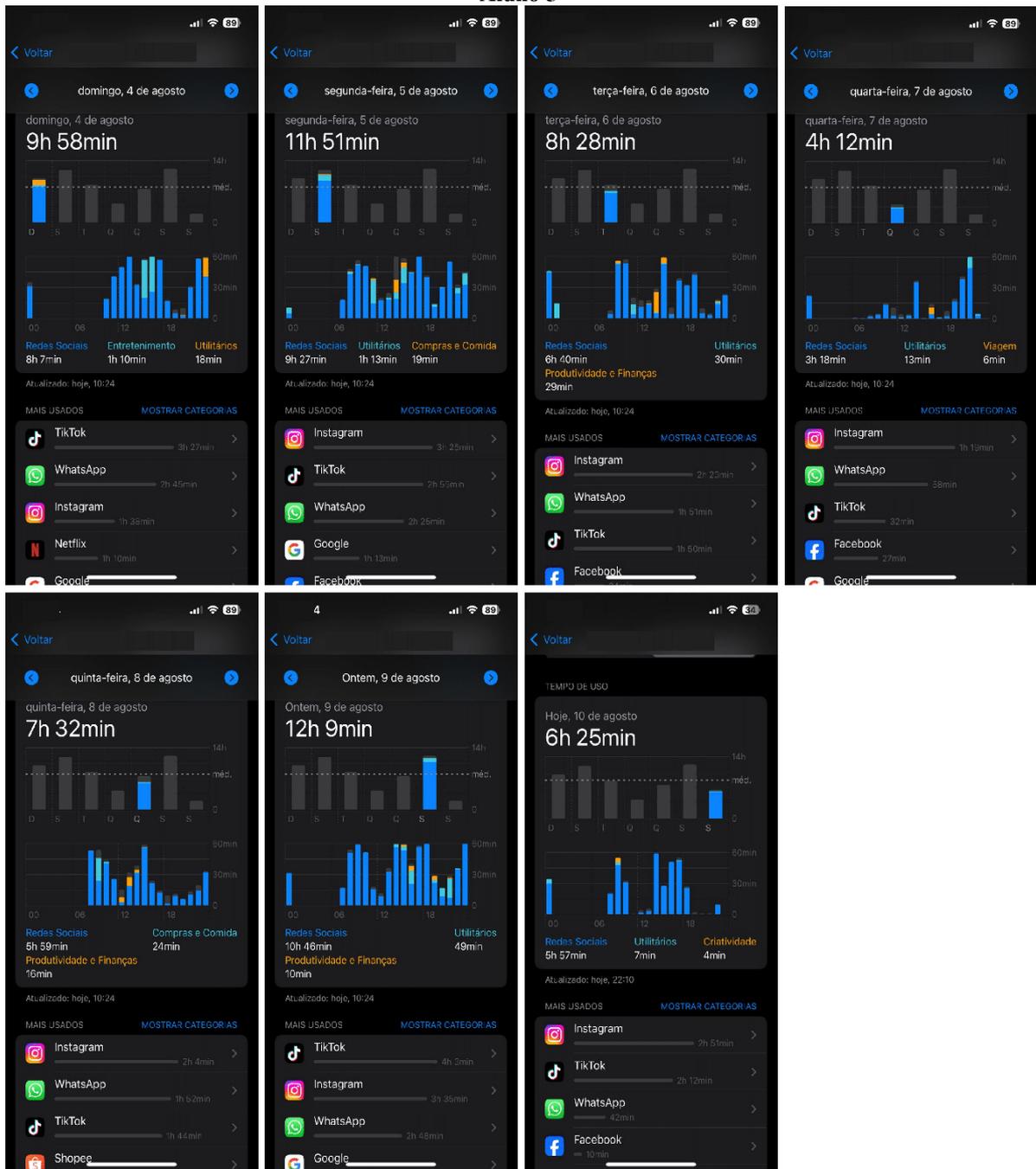
Aluno 3



Aluno 4



Aluno 5



Fonte: Registros coletados pela autora.

Analisando os dados do Aluno 5 (selecionado devido a discrepância de valores entre os dias), notamos que o seu tempo de uso foi:

- **Domingo:** 9h58
- **Segunda-feira:** 11h51
- **Terça-feira:** 8h28
- **Quarta-feira:** 4h12

- **Quinta-feira:** 7h32
- **Sexta-feira:** 12h09
- **Sábado:** 6h25

Após a coleta dos dados, os alunos serão convidados a fazerem a análise desses dados, com o objetivo de refletirem sobre seus próprios hábitos. Na etapa de Resolução, os alunos serão instigados a descobrir qual o tempo médio que passam no celular diariamente, sendo orientados a deixarem registrado como chegaram ao resultado, e assim comparando os resultados com diferentes padrões e buscando entender como esses hábitos influenciam suas rotinas. Essa atividade permitirá que os alunos desenvolvam habilidades de análise de dados, ao mesmo tempo em que fomentam a reflexão sobre o uso equilibrado da tecnologia em suas vidas cotidianas.

Objetivo: Introduzir as medidas de tendência central e como aplicá-las aos dados coletados interpretando o modelo construído e validando-o ou não.

Introdução dos Conceitos Matemáticos: Média Aritmética - Para calcular a média do tempo de uso da semana em que foi coletado os dados, os alunos somarão todos os valores diários e dividirão pelo número total de dias da semana.

Fórmula:

$$\text{Média Aritmética} = \frac{\text{soma dos valores}}{\text{número total de valores}}$$

Exemplo com os dados acima:

$$\text{Média Aritmética} = \frac{713+508+252+452+400+729+385}{7}$$

$$\text{Média Aritmética} = 491,28 \text{ minutos}$$

Logo, o tempo médio de uso para cada aluno é de 491,28 minutos, ou 8,18 horas.

Moda: A moda será o tempo que mais se repete entre os dados coletados, ou seja, tempo de uso mais comum do aluno.

Exemplo com os dados apresentados: nenhum tempo de uso dos dias se repetiu (devido à natureza dos dados), logo, os dados apresentados são amodal.

Mediana: Para descobrir a mediana os alunos precisarão organizar os dados coletados ordenando de forma crescente ou decrescente. Se o número de dados for ímpar, a mediana é o valor que fica no meio. Se for par, a mediana será a média dos dois valores centrais.

Exemplo com os dados apresentados:

252; 485; 400; 452; 508; 713; 729

Como há 7 dias de dados, a mediana será o quarto valor: 452 minutos.

5.1.4 Interpretação de resultados e validação do modelo (Aula 4)

Objetivo: Consolidar os conceitos estatísticos de média, moda e mediana por meio da interpretação e validação dos dados coletados, promovendo também a reflexão crítica sobre os hábitos digitais dos alunos e incentivando uma postura consciente em relação ao uso da tecnologia.

Atividades: Nesta aula final, os alunos retomam os dados coletados ao longo da semana e, organizados em pequenos grupos, iniciam um momento de análise e interpretação conjunta. Com base nos cálculos realizados nas aulas anteriores, discutem o que os dados revelam sobre seus hábitos diários com os dispositivos móveis, em especial no que se refere ao tempo de uso de aplicativos e suas possíveis implicações na rotina. O professor orienta esse momento propondo perguntas provocadoras, como: “A média representa bem o tempo que você realmente passa no celular?”, “A mediana é mais fiel à sua rotina do que a média?” ou ainda “Quais dias apresentaram um uso fora do comum, e o que isso pode indicar?”.

Na sequência, os grupos apresentam suas reflexões à turma, destacando os principais resultados encontrados e suas interpretações. Esse momento permite validar os modelos construídos, comparando os diferentes padrões de uso entre os colegas, refletindo sobre semelhanças e diferenças e ampliando a percepção coletiva sobre o fenômeno analisado. A troca entre os grupos fortalece a aprendizagem colaborativa e evidencia a importância da estatística como ferramenta de leitura e intervenção sobre a realidade.

A aula se encerra com uma roda de conversa aberta, na qual os alunos são convidados a compartilhar, individual ou coletivamente, os aprendizados adquiridos, tanto em relação aos conteúdos matemáticos quanto às reflexões sobre o uso consciente da tecnologia. Essa conversa final é conduzida com perguntas como: “O que podemos aprender com os dados que coletamos?”, “O que mudou na forma como você vê o seu uso do celular?” e “Como esse tipo de atividade poderia ser aplicado a outros temas da sua vida?”.

A avaliação ocorre de maneira contínua e formativa ao longo da aula, considerando o envolvimento dos alunos nas discussões, a qualidade da análise apresentada, a coerência na

interpretação dos dados e a capacidade de articular os conceitos de média, moda e mediana com a realidade observada. Além disso, é valorizada a postura crítica e reflexiva demonstrada ao longo das atividades e durante a roda de conversa. Com isso, a avaliação se integra ao processo de aprendizagem, reconhecendo o percurso dos alunos e não apenas o resultado final.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo demonstra a importância de integrar a Modelagem Matemática ao ensino de estatística, de uma maneira contextualizada e ajustada às demandas atuais dos estudantes, utilizando dados reais sobre o tempo de uso de aplicativos digitais, facilitando o entendimento dos conceitos estatísticos de média, moda e mediana, e incentivando os alunos a terem uma análise crítica dos seus próprios costumes digitais.

Assim, a sequência didática apresentada contribui para o desenvolvimento de habilidades analíticas para a formação de cidadãos mais conscientes, capacitados a fazer escolhas responsáveis e embasadas em relação ao uso da tecnologia.

Além disso, a proposta apresentada motiva os estudantes a pensarem sobre o efeito do uso excessivo do dispositivo celular no seu bem-estar e, assim, ao integrar teoria e prática, os estudantes não apenas aprimoram suas competências analíticas e matemáticas, mas também compreendem a significância do equilíbrio na utilização da tecnologia em suas atividades diárias.

Ademais, este trabalho evidencia que a utilização de temas do cotidiano, como o bem-estar digital, simplifica o aprendizado de conteúdos matemáticos e aproxima a teoria da prática. Com o incentivo ao debate sobre a conscientização do uso equilibrado da tecnologia, a proposta alinha-se com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que enfatizam o desenvolvimento integral do aluno, unindo a formação acadêmica à preparação para os desafios contemporâneos, como o uso responsável da tecnologia.

Assim, a proposta apresentada neste estudo não apenas auxilia no ensino de estatística de maneira mais envolvente e prática, mas também contribui para a formação de cidadãos mais críticos e conscientes de seus hábitos digitais.

A presença da estatística em nossas decisões diárias é indispensável, pois ela nos permite substituir o “achismo” por análises baseadas em dados concretos, diminuindo o risco de conclusões errôneas e promovendo escolhas mais informadas e responsáveis.

Portanto, integrar a matemática e pensamento estatístico ao cotidiano não é apenas uma ferramenta educacional, mas uma habilidade essencial para lidar com as incertezas e mudanças do mundo moderno.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W. de; SILVA, K. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. 1. ed., 2. reimpr. São Paulo: Contexto, 2016.

ALMEIDA, L. W. de; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 3. ed. Brasília: MEC, 2018.

BUENO, A.; GABRIEL, C.; JUNIOR, C. A. A. **Capítulo de livro didático de matemática 9º ano sobre estatística**. 2019. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~dpdias/2019/LivroNot/Cap%C3%ADtulo%20livro%20did%C3%A1tico%20de%20matem%C3%A1tica%209.pdf>. Acesso em: 27 jun. 2025.

DINO, Luísa Adib; COSTA, Daniela. Uso da internet por crianças e adolescentes no Brasil: dinâmicas e desafios. **RE@D – Revista de Educação a Distância e Elearning**, v. 4, n. 1, p. 25-41, 2021.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

SOUZA, E. F. D. **A influência do uso de smartphone nos comportamentos relacionados à atividade física, desempenho escolar e privação de sono dos adolescentes**. 2020. 152 f. Tese (Doutorado em Ciências da Motricidade) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Presidente Prudente, 2020.

TUDOCELULAR. **Samsung está desativando o recurso do bem-estar digital em celulares Galaxy**. 2023. Disponível em: www.tudocelular.com/samsung/noticias/n205879/bem-estar-digital-celulares-samsung-galaxy.html.

OFICINA DA NET. **Como configurar o seu novo iPhone**. 2018. Disponível em: <https://www.oficinadanet.com.br/apple/24183-como-configurar-o-seu-novo-iphone>.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

CAPÍTULO V

A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO PROMOTORA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA NO ENSINO MÉDIO

DOI: 10.51859/ampla.epm963.1125-5

Ana Karuline Palhares de Souza
karupalhares@gmail.com

Cíntia Cristiane de Andrade
andrade-cintia@hotmail.com

Daniela Barbieri Vidotti
daniela.barbieri@unespar.edu.br

Paulo Henrique Rodrigues
hrpaulo.91@gmail.com

RESUMO

Este estudo investiga contribuições da Modelagem Matemática, como alternativa pedagógica em uma experiência prática em sala de aula, para promover a Educação Matemática Crítica. Apresenta-se um relato de experiência de 4 aulas realizadas durante o Estágio Curricular Supervisionado (ECS) em 2024. No decorrer das aulas, os alunos do 3º ano do ensino médio técnico realizaram atividades baseadas no tema “compras online”, aplicando conceitos de geometria para calcular o volume de embalagens. A metodologia combinou Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica, incentivando a reflexão sobre o consumo online, o impacto ambiental do descarte de embalagens e questões sociais, como a sustentabilidade. Os resultados mostraram que a abordagem ajudou os alunos a entenderem a matemática de forma contextualizada e a refletir criticamente sobre suas escolhas e o impacto destas na sociedade e no meio ambiente.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Educação Matemática Crítica. Sustentabilidade.

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho analisamos o desenvolvimento de uma aula aplicada durante o Estágio Curricular Supervisionado (ECS) no ano de 2024, integrando Modelagem Matemática (MM) e Educação Matemática Crítica (EMC) na educação básica. Esta pesquisa buscou utilizar a Modelagem Matemática como espaço de aprendizagem, ao tratar do tema “volume de blocos retangulares” sob a ótica da Educação Matemática Crítica, com o suporte de tecnologias digitais.

A Modelagem Matemática é uma alternativa pedagógica útil para entender e resolver problemas do dia a dia, permitindo representar situações reais com conceitos e métodos matemáticos. Sua aplicação vai além de técnicas algébricas, geométricas e estatísticas, envolvendo uma reflexão crítica sobre o papel da matemática na formação humana. A Educação Matemática Crítica propõe um ensino que vai além do ensino mecânico da matemática, incentivando os alunos a questionar e interpretar as relações entre a matemática e os fenômenos sociais, culturais e econômicos.

O uso de diferentes abordagens no ensino de matemática, como a Modelagem Matemática, tem se mostrado eficaz para tornar o aprendizado mais relevante para os alunos, pois ajuda a aplicar conceitos matemáticos em situações cotidianas, tornando o aprendizado mais contextualizado.

O presente trabalho propõe a elaboração de quatro aulas que integram Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica, com o objetivo de abordar o conceito de volume de blocos retangulares de maneira diferente do tradicional para os estudantes do 3º ano do ensino médio profissionalizante. A atividade foi desenvolvida no âmbito do Estágio Curricular Supervisionado (ECS) de 2024, levando em consideração os interesses e as práticas cotidianas dos alunos. O tema central da proposta, "Compras na Internet", busca explorar questões atuais e relevantes, como a frequência de uso de sites de *e-commerce*, o impacto desses sites no comércio local, os custos envolvidos (como o frete) e as implicações ambientais do descarte inadequado das embalagens.

A escolha do tema e a utilização de tecnologias digitais visam aproximar o conteúdo matemático da realidade dos alunos, ao mesmo tempo em que promove uma análise crítica sobre as questões sociais, econômicas e ambientais associadas ao consumo virtual desenfreado.

A partir das contribuições teóricas de Almeida, Silva e Vertuan (2012) e Skovsmose (2001), que defendem a importância de uma educação matemática mais crítica e reflexiva, este trabalho busca não apenas ensinar um conteúdo matemático específico, mas também incentivar

os alunos a pensar criticamente sobre as implicações de seus próprios comportamentos e escolhas, tanto no âmbito individual quanto coletivo.

Dessa forma, a proposta de aula desenvolvida neste trabalho pretende não só contribuir para a compreensão matemática do tema abordado, mas também para a formação de um aluno mais consciente e ativo em sua realidade, utilizando a matemática como ferramenta de reflexão e intervenção social.

Inicialmente, será apresentada a concepção de Modelagem Matemática assumida, bem como aspectos da Educação Matemática Crítica, num enfoque teórico. Os principais pesquisadores para a Modelagem Matemática são Almeida, Silva e Vertuan (2012); Bassanezi (2012); Blum e Niss (1991); Barbosa (2001; 2004) e Borssoi (2013). Já para a Educação Matemática Crítica, a fundamentação recai sobre Skovsmose (2000, 2001, 2004, 2007) e D'Ambrosio (2001). Em seguida, será feita uma reflexão das duas abordagens pedagógicas, levantando suas potencialidades e afinidades que podem tornar uma aula muito mais significativa.

Por fim, será apresentada a atividade trabalhada na turma de 3º ano do ensino médio técnico em que por meio da Modelagem Matemática e da EMC, buscamos contribuir com a formação do pensamento crítico sobre as potencialidades e inabilidades que os e-commerces causam no comércio local e no meio ambiente.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática, sob a ótica da Educação Matemática, envolve a criação de representações matemáticas para ilustrar fenômenos e situações do mundo real, apresentadas por meio de equações, gráficos, tabelas ou outras modalidades de representação, com a finalidade de favorecer o ensino e a aprendizagem da matemática.

O presente trabalho se apoia na Modelagem Matemática na Educação Matemática, doravante Modelagem Matemática, assumida por Almeida, Silva, Vertuan (2012), em que:

Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final. Nesse sentido, relações entre realidade (origem da situação inicial) e matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão ancorados), servem de subsídio para que conhecimentos matemáticos e não matemáticos sejam acionados e/ou produzidos e integrados. A essa situação inicial problemática chamamos situação-problema; à situação final desejada associamos uma representação matemática, um modelo matemático (Almeida; Silva; Vertuan, 2012, p. 12).

Para os autores supracitados, a Modelagem Matemática consiste em quatro etapas, sendo elas:

- **Inteiração:** etapa em que os alunos têm o primeiro contato com a atividade, se inteiram do assunto e fazem a devida coleta de dados;
- **Matematização:** após o aluno reconhecer o tema trabalhado e ter feito a estruturação do problema, é necessário que ele transforme suas anotações da linguagem natural para linguagem matemática, evidenciando o problema matemático a ser resolvido por meio de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações;
- **Resolução:** consiste na elaboração de um modelo matemático com o objetivo de responder às questões levantadas sobre o tema a ser investigado na situação em questão;
- **Interpretação dos resultados e validação:** desenvolvimento do processo de avaliação dos alunos no que se refere à validação da representação matemática associada ao problema. Esse processo considera tanto os métodos matemáticos empregados quanto a adequação da representação criada pelos alunos para a situação em questão.

Para Bassanezi (2012), a Modelagem Matemática não se limita a aplicar técnicas matemáticas para encontrar soluções, ela implica em um processo de compreensão do problema e de criação de modelos matemáticos para representá-lo. Também cita que: “[...] é o processo de criação de modelos onde estão definidas as estratégias de ação do indivíduo sobre a realidade, mais especificamente sobre a sua realidade, carregada de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador” (p.11).

Segundo Blum e Niss (1991), Modelagem Matemática é o processo de traduzir uma situação do mundo real em um modelo matemático, manipulá-lo para resolver o problema e, finalmente, interpretar os resultados no contexto original. Além disso, os alunos podem aprimorar habilidades e o pensamento crítico para mobilizar e aplicar os conhecimentos matemáticos, tornando o aprendizado mais relevante e estimulante. Ademais, em determinadas situações, essa abordagem pode preparar os alunos para lidar com os desafios do mundo real.

Barbosa (2001, p.75) destaca que a Modelagem Matemática está ligada à problematização e investigação, permitindo explorar temas e questionar a visão de que a matemática é uma ciência infalível e imutável. Ele vê a Modelagem como uma maneira de analisar criticamente as aplicações da matemática, desafiando a ideia de que ela oferece respostas definitivas. Segundo Barbosa (2004, p.74), as atividades de modelagem ajudam a questionar essa "ideologia da certeza" e incentivam os alunos a refletir sobre o papel da matemática no cotidiano.

Além disso, Barbosa (2004) descreve a Modelagem Matemática em três tipos de situações, que variam conforme o nível de participação do professor e do aluno (como apresentado no quadro 1). Esses três casos representam diferentes formas de engajamento dos envolvidos no processo, desde a formulação do problema até a solução, permitindo que o aluno tenha uma experiência de aprendizado mais ativa e participativa.

Quadro 2 - Casos de Modelagem.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Formulação do problema	professor	professor	professor/aluno
Simplificação	professor	professor/aluno	professor/aluno
Coleta de dados	professor	professor/aluno	professor/aluno
Solução	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Fonte: Barbosa (2004).

De acordo com Borssoi (2013) a Modelagem Matemática pode usar tecnologias para oferecer aos alunos aprendizado prático, promovendo o desenvolvimento e a criação de novos conhecimentos.

Portanto, a Modelagem Matemática, quando usada no ensino, torna o aprendizado mais próximo à realidade dos alunos, ajudando no desenvolvimento de habilidades críticas e na formação de cidadãos mais conscientes. Em vez de focar só na teoria, ela mostra como a matemática pode ser uma ferramenta útil para entender e transformar o mundo. Apesar de alguns desafios na sua aplicação, a Modelagem é uma abordagem poderosa que torna o ensino de matemática mais relevante, interessante e aplicável à vida dos estudantes.

3 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA

A Educação Matemática Crítica, fundamentada nas ideias do matemático e educador Ole Skovsmose, propõe uma abordagem que vai além do ensino tradicional da matemática como um conjunto de regras e técnicas a serem aplicadas. Ao invés de simplesmente ensinar os alunos a resolver problemas de forma mecânica, a Educação Matemática Crítica busca desenvolver a capacidade de reflexão sobre o papel da matemática na sociedade e seu impacto na vida das pessoas. Skovsmose (2000) afirma que:

Em geral, melhorias na educação matemática estão intimamente ligadas à quebra de contrato didático. Quando inicialmente sugeri desafiar o Paradigma do Exercício, isso pode ser visto também como uma sugestão de quebrar o contrato da tradição da matemática escolar (p. 63).

De acordo com Skovsmose (2004, p. 4), Educação Matemática Crítica

Não deve ser entendida como um ramo especial da educação matemática. Ela não pode ser identificada com uma determinada metodologia em sala de aula, nem pode ser constituída por um currículo específico. Em vez disso, vejo a educação matemática crítica como sendo caracterizada por preocupações emergentes da natureza crítica da educação matemática. Estas preocupações têm a ver com a pesquisa e a prática.

Para Skovsmose (2014), o uso de cenários de investigação na aprendizagem deve envolver ação e diálogo, incentivando a participação ativa do aluno de forma democrática, permitindo que ele aceite ou recuse a atividade livremente. Trabalhar com cenários de investigação implica aceitar as consequências, sejam elas positivas ou negativas, de um método de ensino diferente. Alrø e Skovsmose (2010) destacam que a eficácia dessa abordagem depende da qualidade da relação entre aluno e professor. Assim, a decisão do aluno de aceitar ou não o convite do professor para participar de uma investigação está vinculada à intenção e à forma como esse convite é feito.

Na Educação Matemática, especialmente no contexto da Educação Matemática Crítica, Skovsmose (2001) destaca diversos objetivos para as aulas de Matemática: (1) preparar os alunos para o exercício consciente da cidadania; (2) usar a matemática como ferramenta para analisar questões sociais relevantes; (3) considerar os interesses dos alunos; (4) abordar os conflitos culturais e sociais no ambiente escolar; (5) refletir sobre a matemática e seus usos; e (6) estimular a comunicação em sala de aula, promovendo interações que sustentem uma vida democrática.

A Educação Matemática ocorre em áreas profissionais específicas, em atividades que envolvem cálculos, operações financeiras, orçamentos familiares e, portanto, está presente em diversas situações do cotidiano. Skovsmose expande o conceito de Educação Matemática, indo além dos processos de ensino e aprendizagem que acontecem na escola, onde

A Educação matemática é parte da comunicação e interação diária. [...] Pode ocorrer em quaisquer situações. Eu uso a palavra educação matemática quando eu desejo me referir a situações onde os processos de aprender e ensinar matemática estão ocorrendo. Assim, a educação matemática torna-se um rótulo que cobre tudo e eu desejo ignorar as conotações que indicam apenas os processos de ensino e de aprendizagem que ocorrem na escola. Educação matemática ocorre em todo lugar (Skovsmose, 2007, p. 48-49).

Ubiratan D'Ambrosio destaca que a matemática deve ser vista como uma prática social e, portanto, pode ser ensinada de forma contextualizada. Para ele, “a matemática não é um conjunto de verdades absolutas ou universais, mas uma construção humana, que tem a ver com a organização social e o atendimento de necessidades” (D'Ambrosio, 2001, p. 42). Ao ensinar

matemática de forma contextualizada, os professores ajudam os alunos a perceberem a utilidade da disciplina em suas vidas diárias e sua capacidade de transformar a realidade.

A matemática, então, é apresentada não apenas como uma ferramenta para resolver problemas abstratos, mas como um instrumento que pode ser utilizado para analisar e modificar a realidade social e econômica. Em seu texto, D'Ambrosio afirma que a educação matemática deve engajar os estudantes na reflexão sobre como a matemática é usada no mundo real: “O ensino de matemática deve contribuir para que os alunos se tornem capazes de fazer perguntas, levantar problemas e buscar soluções que possam impactar positivamente sua realidade” (D'Ambrosio, 2001, p. 45).

A Educação Matemática Crítica propõe uma revisão do papel da matemática no ensino escolar. Em vez de ser vista como uma disciplina abstrata e distante da realidade dos estudantes, a matemática deve ser tratada como um meio de análise e compreensão crítica da sociedade.

4 MODELAGEM MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

A Modelagem Matemática e a Educação Matemática Crítica são abordagens de ensino que objetivam formar indivíduos críticos, capazes de entender e atuar nas questões sociais e culturais. Ambas visam desenvolver o pensamento crítico e demonstram que a matemática vai além de uma habilidade técnica, sendo uma ferramenta para interpretar e transformar a realidade.

De acordo com Ceolim e Hermann (2012, p.17):

Modelagem Matemática pode formar a base para as ações mais poderosas. Para uma Educação Matemática Crítica, torna-se importante abordar a modelagem também como um exercício, legítimo ou não, do poder. Ilustrar a complexidade dos problemas associados à Modelagem Matemática é uma das metas da Educação Matemática Crítica. E certamente não se pode ficar na suposição de que a Modelagem Matemática tem uma qualidade única de ensino. Certamente, a Modelagem Matemática abre muitas possibilidades de ensino, mas elas têm de ser exploradas de forma crítica.

A Modelagem Matemática é um processo que envolve a tradução de problemas reais em representações matemáticas, permitindo que os alunos resolvam questões concretas do mundo em que vivem. Dessa maneira, a Modelagem se afasta da visão tradicional de matemática como um conjunto de regras a serem decoradas e aplicadas, colocando-a como um meio para a compreensão e transformação da realidade.

A Modelagem Matemática, segundo Barbosa (2004, p.75), ocorre quando “o ambiente de modelagem está ligado à problematização e investigação”, ou seja, ao discutir temas é

possível investigá-los e desafiar a ideologia ainda presente no ensino da matemática. Barbosa (2004, p.74) afirma que “as atividades de modelagem podem ajudar a desafiar a ideologia da certeza e oferecer uma visão crítica sobre as aplicações da matemática”, uma ideologia baseada na ideia de que a matemática é infalível e imutável, sendo vista como a verdade absoluta para qualquer problema, ou seja, uma linguagem de poder (Skovsmose, 2001).

No contexto da Educação Básica, a Modelagem Matemática pode ser uma excelente ferramenta para fomentar o pensamento crítico dos alunos, pois promove a integração entre a matemática e as questões do cotidiano, como problemas ambientais, econômicos, sociais e culturais. Ao utilizar situações do mundo real para desenvolver os conceitos matemáticos, a modelagem permite que os alunos compreendam a matemática como uma ferramenta útil para interpretar e intervir na sociedade. Em vez de uma disciplina isolada, a matemática se torna um meio de análise e reflexão sobre os fenômenos que acontecem ao redor.

A Educação Matemática Crítica propõe uma visão da matemática que ultrapassa a ideia de ensino de conteúdos em um formato puramente técnico. Para a EMC, a matemática deve ser tratada como um instrumento para a construção de uma visão crítica da realidade, permitindo aos estudantes questionar as relações de poder, os aspectos sociais e econômicos, e as desigualdades presentes no mundo. Skovsmose (2005) defende que a educação matemática deve ser um processo de questionamento e transformação, capacitando os alunos a compreenderem e a agir criticamente sobre as questões que afetam suas vidas e a sociedade em geral.

A Educação Matemática Crítica enfatiza que a matemática não deve ser vista como uma linguagem neutra e objetiva, mas como uma prática social, cujas soluções e abordagens podem ter implicações importantes para a vida das pessoas. Nesse sentido, a Modelagem Matemática se alinha perfeitamente com os objetivos da Educação Matemática Crítica, pois, ao trabalhar com problemas reais e contextuais, os alunos são convidados a refletir sobre os impactos das soluções propostas, considerando suas consequências sociais e culturais.

A Modelagem Matemática, segundo Barbosa (2004, p.75), ocorre quando “o ambiente de modelagem está ligado à problematização e investigação”, ou seja, ao discutir temas é possível investigá-los e desafiar a ideologia ainda presente no ensino da matemática. Barbosa (2001, p.74) afirma que “as atividades de modelagem podem ajudar a desafiar a ideologia da certeza e oferecer uma visão crítica sobre as aplicações da matemática”, uma ideologia baseada na ideia de que a matemática é infalível e imutável, sendo vista como a verdade absoluta para qualquer problema, ou seja, uma linguagem de poder (Skovsmose, 2001).

Durante uma pesquisa realizada nas cidades de Londrina e Maringá no ano de 2004, através de uma atividade sobre o horário de verão, Almeida e Silva (2010) concluem que, por meio do uso da Modelagem Matemática juntamente com a EMC

As atividades desenvolvidas levaram os alunos ao envolvimento com outros setores da sociedade, não se restringindo ao ambiente da escola e à relação professor aluno; as informações de profissionais especializados que apresentam os dados em diferentes atividades puderam ser analisadas e aceitas (ou não) pelos alunos a partir de conhecimentos matemáticos (p. 239).

Dessa forma, a Modelagem Matemática, quando usada de maneira eficaz, pode transformar o ensino de matemática na Educação Básica, tornando-o mais interessante, relevante e ligado à realidade dos alunos. Com essa abordagem, a matemática deixa de ser apenas uma matéria teórica e passa a ser vista como uma ferramenta útil para entender e lidar com problemas do mundo real. Ao integrar a Modelagem Matemática com a Educação Matemática Crítica, os alunos não só desenvolvem suas habilidades matemáticas, mas também se tornam mais conscientes e capazes de refletir sobre questões sociais, se preparando melhor para atuar de forma crítica na sociedade.

5 DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

A pesquisa adotou uma abordagem qualitativa, na qual o objetivo é analisar como a Modelagem Matemática, por meio de uma experiência prática em sala de aula, pode ser utilizada como alternativa pedagógica para promover uma Educação Matemática Crítica no Ensino Médio. A coleta de dados foi realizada durante a regência do estágio curricular supervisionado (etapa do estágio em que os discentes vão ao colégio e ministram 4 horas-aula para uma turma previamente acompanhada da rede básica de ensino) em uma turma de 3º ano do ensino médio técnico, na qual a grande maioria já havia alcançado a maioridade e consentira com o uso de todos os dados coletados oralmente.

A escolha do tema a ser trabalhado na regência se deu durante as 20 horas de coparticipação (etapa do estágio em que os discentes acompanham professores da rede pública de ensino em suas aulas e as observam), realizadas nas turmas de ensino médio do colégio. Quatorze horas foram realizadas na turma em que escolhi para realizar a regência, onde pude perceber que a grande maioria da turma gostava bastante de realizar compras na internet.

A partir desse contato com os alunos, visando considerar os interesses dos mesmos como propõe Skovsmose (2001), perguntei⁵ a turma sobre qual tema gostariam de trabalhar

⁵ Em alguns momentos o texto será escrito em primeira pessoa do singular.

na regência e dentre alguns temas que citaram, chegamos a um acordo que seria algo relacionado a compras na internet. Então, conversando com a professora supervisora e orientadora sobre este interesse em comum da turma, ficou decidido que trabalharia o conteúdo de volume de blocos retangulares envolvendo compras online, e também seria abordado a importância do descarte correto de das embalagens de plástico/papelão em que vem embrulhado as encomendas. Concluímos que a metodologia mais adequada seria a Modelagem Matemática juntamente com a Educação Matemática Crítica, o que me alegrou, pois já havia tido contato com estas abordagens.

Feito isso, comecei a me questionar sobre a maneira como abordaria o conteúdo planejado de modo que utilizasse as compras na internet como um mecanismo para alcançar um resultado pretendido, então me lembrei que a maioria das compras vem em uma caixa de papelão, e que muitas transportadoras cobram um valor de frete proporcional ao volume da caixa em que a encomenda está disposta. Por fim, cheguei a uma atividade que será apresentada a seguir.

Atividade: Levando em consideração os sites de compras apresentados nos slides⁶, responda:

- 1) Qual o seu site de compras favorito? Você o utiliza frequentemente?
- 2) Quantas compras você realizou neste site nos últimos 6 meses?
- 3) Suponhamos que este site entregue suas mercadorias em caixas de papelão ondulado de três tamanhos e tenha um frete fixo por tamanho:
 - Caixa 1: 21x13x8, R\$9,00
 - Caixa 2: 25x17x8, R\$15,00
 - Caixa 3: 30x19,5x11, R\$23,00

Qual seria o frete pago na sua última compra?

- 4) Tendo em mente que você não utilizou um meio correto de reciclagem para as caixas de papelão, em quanto tempo, aproximadamente, ela terá se decomposto totalmente no meio ambiente?

A atividade foi pensada e desenvolvida de forma que atendesse aos 4 passos da Modelagem Matemática segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), e que também pudesse

⁶ Foi apresentado alguns slides com imagens de alguns sites de compras da internet.

abordar a EMC, segundo Skovsmose (2001), trazendo assim algo do dia a dia que me permitisse abordar conflitos sociais e culturais de cada aluno da turma. A Modelagem Matemática está presente quando o aluno utiliza conceitos matemáticos para resolver um problema real. Na atividade ele aplicaria os conhecimentos de geometria e cálculo de volume para determinar o tipo de caixa necessária para o envio de um produto. Desse modo, a Modelagem visa mostrar a relevância da matemática fora da sala de aula, trazendo para o aluno situações cotidianas nas quais ele pode aplicar seus conhecimentos de forma prática.

Já a Educação Matemática Crítica está relacionada ao convite para reflexão sobre o impacto das ações do indivíduo no mundo. A questão sobre o tempo de decomposição do papelão e a reciclagem leva o aluno a pensar nas consequências ambientais de suas escolhas. Esse tipo de conscientização é um exemplo de como a educação matemática pode contribuir para a formação de um cidadão crítico, que reconhece que suas ações não são neutras e têm efeitos na sociedade e no meio ambiente.

Portanto, a atividade não se limita a apenas ensinar matemática, mas também instiga o aluno a pensar sobre como suas ações impactam o mundo e a sociedade. Isso é um reflexo de uma Educação Matemática Crítica que tem como objetivo formar pessoas capazes de questionar, refletir e tomar decisões conscientes.

A atividade foi desenvolvida em quatro aulas, nos dias 07 e 08 de outubro de 2024, sendo duas aulas em cada dia. Para iniciar as duas primeiras aulas, pedi para que a turma se dividisse em quatro grupos com 5 alunos e um grupo com 6 alunos de forma livre. Feito isso, comuniquei a eles que toda a produção seria realizada durante as aulas e que não seria possível levar nada para casa. Em seguida, a fim de promover a etapa da **interação**, realizei uma apresentação de slides com imagens de logos de alguns sites de compras conhecidos e fui fazendo alguns questionamentos à turma com o intuito de familiarizá-los com o tema que seria trabalhado, sendo estes questionamentos:

1. Vocês compram online? Quais sites vocês mais usam?
2. Por que vocês gostam de realizar compras online?
3. Com qual frequência vocês realizam compras online?
4. Quais tipos de produtos vocês mais compram nos e-commerces?
5. Vocês acham que os e-commerces só trazem benefícios ou também há malefícios?

A partir dos questionamentos realizados durante o desenvolvimento da aula, percebi que grande parte dos alunos preferiam realizar compras pelo site da Shopee e Mercado Livre. Quando os questioneei sobre o porquê dessa preferência, me informaram que é devido a grande

quantidade de cupons para desconto e frete grátis, aos valores que são mais acessíveis e a rapidez na entrega das encomendas. Pude refletir que a escolha deles por estas plataformas está relacionada diretamente com o meio que vivem e a condição financeira de cada aluno da turma, pois se fossem alunos de classe alta, acredito que dificilmente utilizariam estas plataformas.

Também percebi, dentre as meninas, que preferem comprar principalmente roupas online e relataram não gostar de ir em lojas físicas pois muitos vendedores não aceitam muito bem o estilo pessoal das pessoas e acabam “forçando” os clientes a levarem algo que não gostaram plenamente.

Neste episódio podemos notar aspectos da EMC, uma vez que os alunos foram instigados a refletir sobre melhores opções de compras, considerando preços, descontos, e ofertas que muitas vezes são apresentados de maneira manipulativa para influenciar a compra. Além disso, ao refletir sobre a pressão para consumir e a questão da satisfação do cliente, pudemos discutir também o conceito de valor de um produto. A matemática pode ser usada para ajudar os alunos a entenderem como calcular o custo-benefício de uma compra e questionar se estão realmente fazendo uma compra que atende suas necessidades, ou se estão apenas respondendo a pressões externas (como a do vendedor ou as do marketing).

Sobre o questionamento número 5, os alunos relataram que os e-commerces na visão deles trazem benefícios como a praticidade de compras e valor reduzido de produtos, porém também prejudica o comércio local, de modo que é reduzida a mão de obra; sendo assim, muitas pessoas ficam desempregadas.

Logo após ter feito a apresentação de slides e ter iniciado a inteiração com os alunos sobre o tema a ser trabalhado, entreguei a atividade impressa em uma folha de sulfite (uma para cada aluno) e pedi para que fizessem uma leitura individual silenciosa. Em seguida, realizei uma leitura em conjunto e perguntei a turma se havia dúvidas sobre o que deveriam realizar.

Como afirmaram que não, pedi à turma que realizassem a atividade em conjunto (matematização) e que escolhessem o aluno mais consumista do grupo para resolver a atividade.

Enquanto os alunos iam resolvendo a atividade (**etapa de matematização**), fui transitando de grupo em grupo, a fim de observar seu desenvolvimento e fazer alguns questionamentos para instigar a sua participação, tais como: *“O que estão fazendo, vocês podem explicar?”*; *“Qual site vocês escolheram?”*; *“Quem vocês elegeram o mais consumista?”*; *“Qual foi a última compra dele/a?”*; *“O que é preciso fazer?”*; *“Como vocês chegaram a este resultado?”*.

Grupo 1: Escolhemos o Diego como o mais consumista, porém quem tem mais compras realizadas nos últimos 6 meses é o Samuel, pois ele emprestou a conta dele da Shopee para a irmã comprar roupas para a filha. A última compra do Diego foi um SSD, um tipo de memória para computador, ele comprou no Mercado Livre e realizou 6 compras nos últimos 6 meses. Escolhemos a caixa número 1, com frete de R\$9,00, porque é a mais adequada para o tamanho do SSD.

Grupo 2: Escolhemos a Débora como mais consumista, ela teve 11 compras nos últimos 6 meses e sua última compra foi uma garrafa térmica de água, inclusive ela está na mochila da Débora, e foi realizada na Shopee. Escolhemos a caixa número 2, com frete de R\$15,00, achamos que é a que melhor vai caber a garrafa.

Grupo 3: Escolhemos a Kelly como mais consumista, ela comprou 22 itens na Shopee nos últimos 6 meses, e a última compra dela foi uma garrafa térmica de água tipo Stanley. Escolhemos a caixa 2, que é a que vai caber a garrafa pelas medidas, e o frete seria R\$15,00.

Grupo 4: Escolhemos a Lídia como a mais consumista, porém a última compra dela foi um Narguilé e estamos com vergonha de colocar isso. Ela teve 13 compras nos últimos 6 meses e comprou o Narguilé no Mercado Livre. Teria que ser uma caixa grande, mesmo que o narguilé vem desmontado, então optamos pela caixa 3 e o frete seria R\$23,00.

Grupo 5: Escolhemos o Otávio como o mais consumista, a última compra dele foi um Tablet pelo site da Amazon. Nos últimos 6 meses ele realizou 12 compras. Foi escolhida a caixa 2 de tamanho 25x17x8, com frete de R\$15,00 pois ele comprou um Tablet.

A seguir, será apresentada a resolução da atividade (**etapa de resolução**) feita pelo grupo 1 (Figura 1).

Figura 1 - Resolução do grupo 1.


UNESPAR

Aluno(a): _____

ATIVIDADE:

Levando em consideração os sites de compras apresentados nos slides, responda:

- 1) Qual o seu site de compras favorito? Você o utiliza frequentemente?
- 2) Quantas compras você realizou neste site nos últimos 6 meses?
- 3) Suponhamos que este site entregue suas mercadorias em caixas de papelão ondulado de três tamanhos e tenha um frete fixo por tamanho:
 - Caixa 1: 21x13x8, R\$9,00
 - Caixa 2: 25x17x8, R\$15,00
 - Caixa 3: 30x19,5x11, R\$23,00
- 4) Qual seria o frete pago na sua última compra?
Tendo em mente que você não utilizou um meio correto de reciclagem para as caixas de papelão, em quanto tempo aproximadamente, ela terá se decomposto totalmente no meio ambiente?

1) Mercado Livre, não

2) 6 compras

3) O frete variou de R\$9,00, item SS D-NVME.M2

4) Período de 6 meses

Fonte: Acervo pessoal (2024).

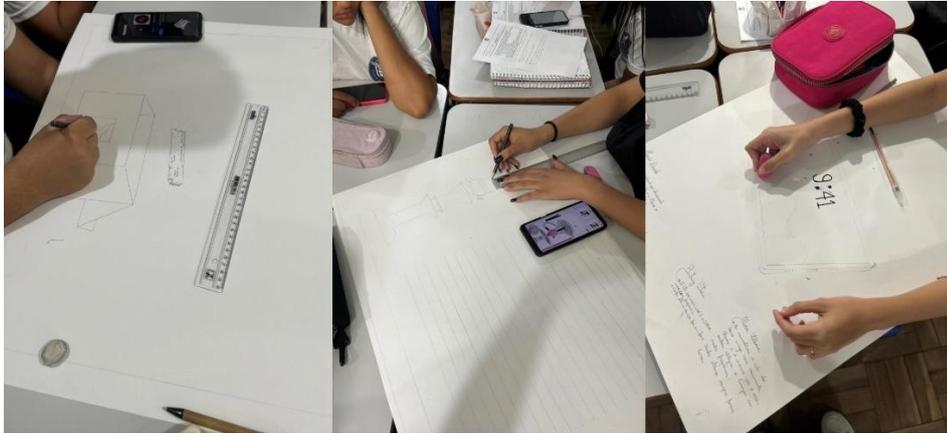
Feitos os meus questionamentos, observei que um dos grupos ficou constrangido com a última compra que haviam realizado, por ser um narguilé. Então falei para o grupo que não precisavam ter vergonha e poderiam prosseguir com o desenvolvimento da atividade, pois todos os integrantes do grupo já haviam alcançado a maioria e, na sala, todos nós éramos jovens e conhecíamos o narguilé, alguns poderiam até ser usuários. Também notei que, na maioria dos grupos, as compras foram objetos úteis para o dia a dia deles e faziam parte do cotidiano.

Porém, realizando pesquisas posteriormente, pude perceber que o uso do narguilé no Brasil é proibido por lei e que, provavelmente a turma apresentou receio em utilizar a compra por saber desta lei. O episódio em que um grupo ficou constrangido com a compra de um narguilé mostra como os julgamentos sociais influenciam as escolhas das pessoas. A EMC permite que a matemática vá além dos cálculos, ajudando os alunos a refletirem sobre as questões sociais e culturais envolvidas nas suas decisões. Ao incentivar os estudantes a resolverem problemas reais e refletirem sobre o consumo, a matemática se torna uma ferramenta para entender as pressões externas e tomar decisões mais conscientes e responsáveis, ajudando na formação de cidadãos críticos e informados.

Após todos terem realizado a atividade, distribuí uma cartolina branca para cada grupo e solicitei que passassem as resoluções das questões para a cartolina e que usassem a criatividade para desenhar a última compra realizada (como apresentado na Figura 3 abaixo).

Determinei para a turma que teriam o restante da aula para terminar o cartaz e que se caso não desse tempo, poderíamos utilizar mais 30 minutos das aulas do dia posterior.

Figura 3 - Estudantes produzindo os cartazes em que continham as representações.



Fonte: Acervo pessoal (2024).

Como já previsto, o tempo restante da aula não foi suficiente e precisou ser terminado no dia posterior. Após o primeiro dia de regência, percebi que estava faltando uma questão na atividade que propus, pois não havia nenhuma questão para que eles mesmos encontrassem uma caixa exata para o produto que compraram. Então, no dia seguinte, levei os lápis de cor e canetas hidrocor e deixei disponível para todos em cima da mesa, devolvi os cartazes e estipulei um tempo de 30 minutos para terminarem. Enquanto estavam terminando os cartazes, fui percorrendo a sala de grupo em grupo e fazendo o seguinte questionamento: “Suponhamos que o produto que você adquiriu veio com algum problema, ou veio errado, ou aconteceu qualquer coisa e você precisará devolver, porém jogou a caixa no lixo. Qual seria a maneira que utilizariam para descobrir qual o tamanho perfeito da caixa para devolver o produto que compraram?”; “E se quisessem saber o volume, como fariam?”.

A questão sobre descobrir o tamanho da caixa para devolução e calcular seu volume oferece uma oportunidade para implementar a EMC, pois vai além do simples cálculo, incentivando os alunos a refletirem sobre o uso prático da matemática e suas implicações. Ela promove a autonomia do aluno ao aplicar conceitos matemáticos na vida real, além de abordar questões como a responsabilidade no consumo e o impacto ambiental do desperdício de embalagens. A matemática, assim, se torna uma ferramenta para não apenas resolver problemas, mas também para refletir criticamente sobre as consequências do consumo e da produção de resíduos.

Grupo 1: O SSD é algo pequeno, então mediria ele e acho que teria que ser uma caixa com 20 centímetros de comprimento, 12 centímetros de largura e 5 centímetros de altura, porque o SSD vem dentro de uma embalagem tipo de pendrive. Para calcular o volume desta caixa, não sei o que faria, mas para calcular a área multiplicaria a largura e o comprimento; porém, não sei o que fazer com a altura.

Grupo 2: Como temos a garrafa aqui, podemos medir ela e adicionar alguns centímetros porque ela vem dentro de uma caixinha. Então seria necessário uma caixa com 21,5 centímetros de altura, 7 centímetros de largura e 7 centímetros de comprimento. Calcular o volume ainda não sabemos, mas talvez seria somente somar as medidas que temos?

Grupo 3: Como é uma garrafa pequena, de uns 500ml, acredito que uma caixa de 22 centímetros de altura, 8 centímetros de largura e 8 centímetros de comprimento já caiba tranquilo a garrafa. O volume nós não sabemos, mas área de um quadrado nós multiplicamos as dimensões. Será que na caixa também?

Grupo 4: O narguilé vem desmontado, quando ele chegou veio numa caixa deste tamanho mais ou menos (mostrou com as mãos). Medindo, acho que vai ser desta altura (15 centímetros), mais ou menos deste tamanho (30 centímetros) e desta largura (20 centímetros). Para o volume, acho que a gente tem que multiplicar e usar o H para representar a altura, pois a professora sempre usa H pra altura no quadro. Então seria $\text{Volume} = C.L.H$. E no nosso caso, seria uma caixa de 9000cm^3 porque se para a área que é duas medidas colocamos o 2, aqui que são três medidas, colocamos o 3.

Grupo 5: Como o nosso produto é um Tablet, ele é algo frágil e teríamos que colocar um plástico bolha em volta da caixinha, então temos que acrescentar mais 2 centímetros ao tamanho do produto. Então a nossa caixa ideal teria 19,5 centímetros de largura, 27,5 centímetros de comprimento e 3,5 centímetros de altura. Para o volume, basta multiplicar as medidas que temos, sendo assim uma caixa de $1.876,87\text{ cm}^3$.

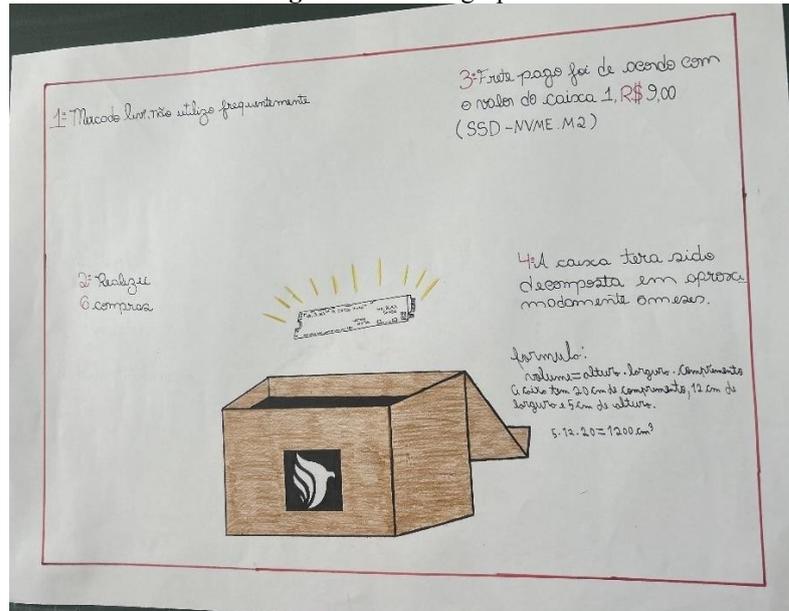
Após todos os grupos me apresentarem seus meios de resolução, os instiguei a pensar na forma como poderiam chegar numa fórmula para o volume do bloco retangular (caixa) de modo que utilizassem todas as medidas encontradas. Feito esta interferência, todos os grupos conseguiram chegar à generalização para o volume sendo $V = C \times L \times A$, em que V representa o volume, C o comprimento e A altura; apenas um grupo representou a altura pela letra H.

Passados os 30 minutos a turma ainda não havia terminado os cartazes, então foi necessário um acréscimo de mais 10 minutos para que todos finalizassem.

A fim de instigar a Interpretação e validação de resultados, após a conclusão dos

cartazes, colamos um a um no quadro de giz (como apresentado nas Figuras 4 a 8 abaixo), sequenciando as resoluções da mais simples para a mais sofisticada para que os alunos pudessem perceber que há várias formas de resolver a atividade e percebam seus possíveis erros. Pedi que elegessem um representante de cada grupo para apresentar suas resoluções a turma, com o intuito de estimular a comunicação da turma em sala de aula.

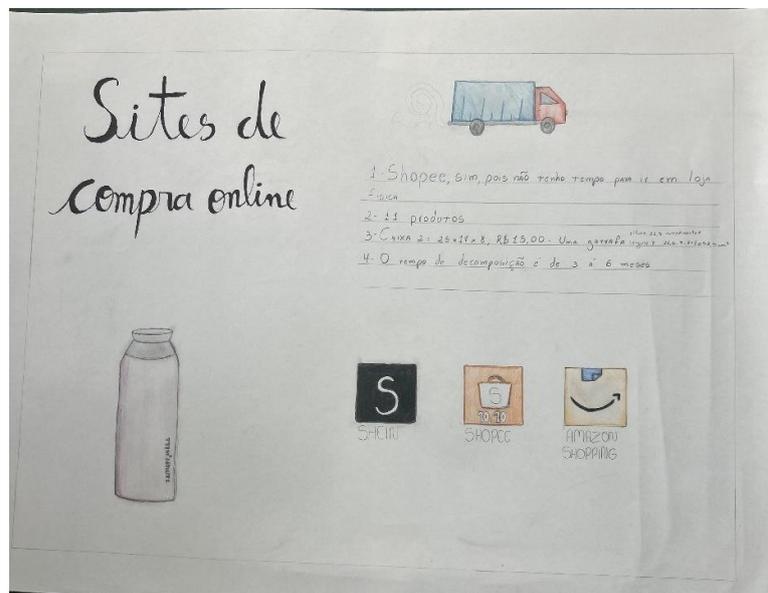
Figura 4 - Cartaz grupo 1.



Fonte: Acervo pessoal (2024)

Podemos notar que o grupo 1 desenhou em seu cartaz o produto adquirido e uma caixa de tamanho um tanto exagerado para sua compra, também podemos observar que escreveram a fórmula para o volume da caixa com $\text{Volume} = \text{altura} \times \text{largura} \times \text{comprimento}$.

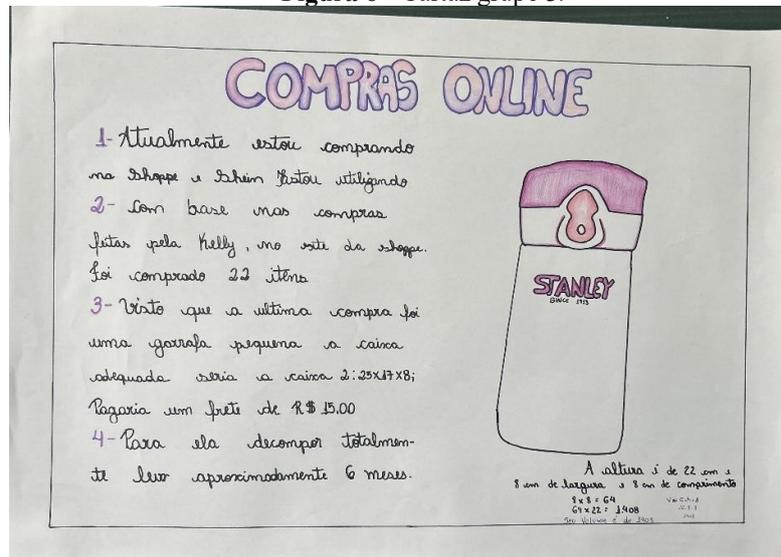
Figura 5 - Cartaz grupo 2.



Fonte: Acervo pessoal (2024).

O grupo 2 desenhou o seu produto de aquisição e também optou por desenhar as logos dos aplicativos que o grupo mais usa para realizar compras online. Porém, podemos observar que o grupo não apresentou sua generalização para o volume da caixa.

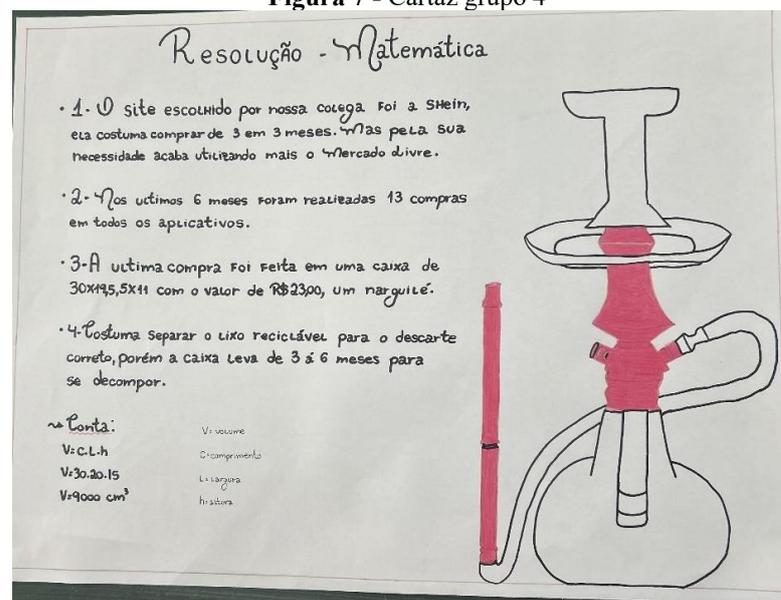
Figura 6 - Cartaz grupo 3.



Fonte: Acervo pessoal (2024).

O grupo 3 utilizou sua criatividade e desenhou perfeitamente o produto que foi adquirido. Podemos notar que apresentaram em seu cartaz as contas necessárias para chegar ao volume da caixa necessária para o transporte de seu produto e chegaram a uma generalização para o volume da caixa, entretanto, não apresentaram uma unidade de medida para seu resultado final.

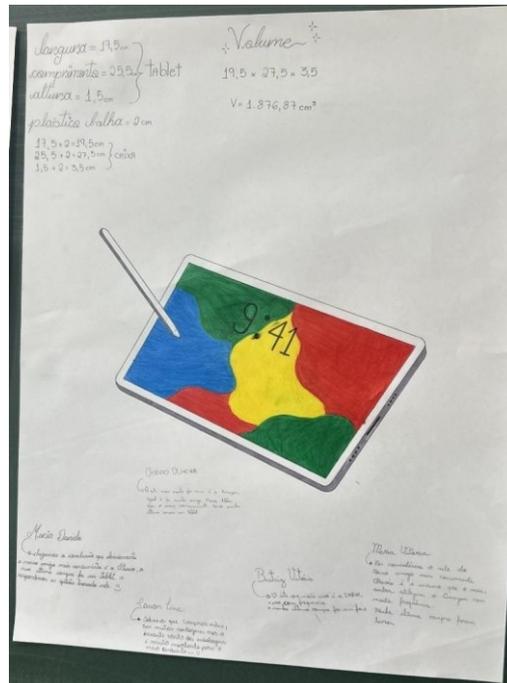
Figura 7 - Cartaz grupo 4



Fonte: Acervo pessoal (2024).

O grupo 4 foi o que mais se aproximou da resolução pretendida, pois chegaram a uma generalização para o volume da caixa e apresentaram uma unidade de medida para seu resultado final. Podemos notar que também foram muito criativos ao desenhar seu produto e capricharam em cada detalhe.

Figura 8 - Cartaz grupo 5.



Fonte: Acervo pessoal (2024).

O grupo 5 demonstrou em seu cartaz todo o pensamento que tiveram para escolher uma caixa perfeita para o transporte de seu produto, desde o tamanho inicial do seu produto até as medidas finais após enrolá-lo em plástico bolha. Também foram engenhosos e desenharam até a caneta que acompanha o tablet que foi adquirido.

Logo após, fizemos uma discussão coletiva a respeito da atividade e enfatizamos a questão 5 da atividade, sobre a importância da reciclagem, a fim de abordar as diferenças culturais e sociais de cada aluno. Durante a discussão, alguns alunos comentaram que separam o lixo reciclável em suas casas e há um caminhão de coleta seletiva que passa duas vezes por semana recolhendo; outros comentaram que moram na zona urbana, porém não têm o costume de separar o lixo e acham que não passa a coleta seletiva. Apenas uma aluna relatou que reside na zona rural da cidade e que não há coleta seletiva de lixo, que os pais têm que enterrar ou até mesmo queimar os lixos que produzem.

A reciclagem, e o tempo que o papelão leva para se decompor, ajuda a conectar a EMC com questões ambientais ao mostrar como a matemática pode ser usada para entender e resolver problemas ecológicos. Por exemplo, os alunos podem calcular quanto tempo o

papelão leva para se decompor e comparar com outros materiais. Eles também podem analisar dados sobre a quantidade de papelão reciclado e pensar em soluções para reduzir o impacto ambiental.

A EMC incentiva a reflexão crítica, ajudando os alunos a compreenderem a importância da reciclagem e da sustentabilidade no nosso dia a dia. Alguns alunos já separam o lixo e têm coleta seletiva em casa, enquanto outros não têm o hábito, seja por falta de acesso ou de conscientização. Uma aluna, por exemplo, mora na zona rural e não tem coleta seletiva, o que leva seus pais a enterrar ou queimar o lixo. A EMC faz os alunos refletirem sobre as desigualdades no acesso à reciclagem e como as escolhas de consumo afetam o meio ambiente, estimulando a busca por soluções responsáveis e conscientes.

Na sequência, realizei a sistematização do conteúdo de volume de blocos retangulares partindo da resolução do grupo 4, em que obtive a resolução mais sofisticada, em que desenhei no quadro de giz um bloco retangular e juntamente com a turma encontramos e nomeamos suas dimensões (comprimento, largura e altura). Em seguida, enfatizei para a turma que o volume é a quantidade de espaço que um objeto ocupa e, no caso dos blocos retangulares, o volume pode ser encontrado multiplicando suas dimensões.

Sua regra geral é: $Volume = C \times L \times H$

Sendo que:

“C” é o comprimento do bloco retangular

“L” é a largura do bloco retangular

“H” é a altura do bloco retangular

E também reitero que assim como o metro é a unidade padronizada de medida de comprimento e o metro quadrado (m^2) é a unidade padronizada de medida de superfície, o metro cúbico (m^3) é a unidade padronizada de medida de volume, em que $1cm^3= 1ml$, $1dm^3=1l$ e $1m^3=1000l$.

Para finalizar a aula, perguntei a turma se todos haviam compreendido o conteúdo e se ainda tinham dúvidas. Como todos disseram que não, então realizamos um exemplo de transformação de cm^3 para ml com o resultado obtido pelo grupo 4, resultando em 9000ml e posteriormente transformamos para litros, obtendo que seria necessário uma caixa com 9 L para a devolução do narguilé, evidenciando assim, a importância da matemática e seu uso no dia a dia.

Neste caso, ao perguntar se todos entenderam o conteúdo e fazer um exemplo prático de conversão de unidades de volume (de cm^3 para ml e depois para litros), a ideia é mostrar como a matemática pode ser aplicada em situações do dia a dia. Além disso, ao transformar

as unidades para calcular a quantidade de litros necessários para devolver o narguilé, o exemplo vai além de apenas aprender fórmulas, ajudando os alunos a ver como a matemática é importante em sua vida cotidiana. Essa abordagem não só ensina a técnica, mas também incentiva a reflexão sobre como a matemática pode ser usada de maneira útil, fazendo com que os alunos percebam sua função na resolução de problemas reais.

Ao combinar a Educação Matemática Crítica e a Modelagem Matemática, pudemos perceber como a matemática pode ser ensinada de maneira mais envolvente, significativa e contextualizada, promovendo a reflexão crítica e o desenvolvimento de habilidades matemáticas aplicáveis à vida cotidiana.

Durante a prática, os alunos foram incentivados a refletir sobre temas como o consumo online, os impactos do e-commerce no comércio local e até mesmo a questão da reciclagem e da sustentabilidade, que são exemplos de temas que abordam diretamente questões sociais. A realização da atividade envolveu uma análise crítica sobre o uso do e-commerce, com os alunos reconhecendo tanto os benefícios quanto os malefícios dessa prática, como o desemprego gerado pelo impacto no comércio local. Esse tipo de reflexão contribui para a formação de uma visão crítica, já que os alunos não apenas resolvem problemas matemáticos, mas também discutem as consequências de suas escolhas e como essas questões afetam a sociedade. Além disso, a questão da reciclagem, levantada durante a discussão sobre o descarte de caixas, incentivou os alunos a refletirem sobre práticas sustentáveis, ampliando a perspectiva matemática para uma conscientização social e ambiental.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Portanto, diante do exposto, podemos concluir que associar o uso de Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica em uma aula pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de geometria na educação básica, focando no conteúdo de volume de blocos retangulares. A atividade proposta, que envolveu o número de compras realizadas em sites pelos estudantes e o cálculo do volume de caixas para transporte de produtos, mostrou-se uma maneira eficaz de ensinar de forma mais prática e reflexiva.

Ao relacionar a geometria com uma situação do dia a dia, como as compras online, os alunos conseguiram entender melhor os conceitos de volume e as aplicações dessas ideias na vida real. Ao calcular o volume das caixas usadas no transporte de produtos, os estudantes perceberam como a matemática está presente em processos cotidianos e como ela é útil para resolver problemas concretos, como o espaço necessário para embalar e transportar mercadorias.

A abordagem crítica, proposta pela Educação Matemática Crítica, foi feita com base nas reflexões e questionamentos efetuados durante toda a atividade, e, por se tratar de uma temática importante para a formação cidadã desses indivíduos, também permitiu que os alunos refletissem sobre questões sociais e econômicas, como o impacto das embalagens no meio ambiente e a diminuição de empregos no comércio local.

Ao combinar Modelagem Matemática com reflexão crítica, os alunos não só aprenderam a calcular o volume de blocos retangulares, mas também desenvolveram uma visão mais ampla de como a matemática pode ser usada para pensar sobre problemas sociais e ambientais. A atividade ajudou a tornar o conteúdo mais interessante e útil, ao mesmo tempo em que incentivou os estudantes a refletirem sobre o papel da matemática na sociedade e no mundo real, diretriz básica da Educação Matemática Crítica.

Em resumo, a união da Modelagem Matemática com a Educação Matemática Crítica mostrou-se uma estratégia eficaz para o ensino de geometria. Ela não só facilitou a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também incentivou os alunos a pensar criticamente sobre como a matemática pode ser usada para resolver questões do nosso cotidiano e facilitar a nossa vida.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W. de; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Editora Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. W. de; SILVA, A. Por uma Educação Matemática Crítica: a Modelagem Matemática como alternativa. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.12, n.2, p.221-241, 2010.

ALRØ, H. SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. 2. ed. Tradução: Orlando Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

BARBOSA, J. C. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais...** Caxambu: [s. n.], 2001.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática: o que é? por que? como? **Veritati**, n. 4, p. 73-80, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Temas & modelos**. Campinas: Unicamp, 2012.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. State, trends and issues in mathematics instruction. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 22, n. 1, p. 37-68, Feb. 1991.

BORSSOI, Adriana Helena. **Modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias: articulações em diferentes contextos educacionais**. 2013. 256 f. Tese (Doutorado

em Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013. Disponível em: <https://pos.uel.br/pecem/teses-dissertacoes/modelagem-matematica-aprendizagem-significativa-e-tecnologias-articulacoes-em-diferentes-contextos-educacionais/>. Acesso em: 3 dez. 2024.

CEOLIM, A. J.; HERMANN, W. Ole Skovsmose e sua educação matemática crítica. **RPEM**, Campo Mourão, PR, v. 1, n. 1, jul./dez. 2012.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica: a questão da democracia**. Campinas: Papyrus, 2001. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática, SBEM). 160 p.

SKOVSMOSE, O. Critical mathematics education for the future. Aalborg: Department of Education, **Learning and Philosophy**, Aalborg University, 2004. p. 1-23.

SKOVSMOSE, O. Guetorização e globalização: um desafio para a educação matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 13, n. 24, p. 113-142, jul./dez. 2005.

SKOVSMOSE, O. **Educação crítica: incerteza, matemática, responsabilidade**. São Paulo: Cortez, 2007.

SKOVSMOSE, O. **Um convite à educação matemática crítica**. Campinas: Papyrus, 2014.

CAPÍTULO VI

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE TRIGONOMETRIA COM O SOFTWARE SCRATCH

DOI: 10.51859/ampla.epm963.1125-6

Nathália Pereira Tietz
naa_dte@hotmail.com

Marcos Vinicius de Oliveira Peres
marcos.peres@ies.unespar.edu.br

Wilian Barbosa Travassos
wilian.travassos@uenp.edu.br

Cintia Cristiane de Andrade
andrade-cintia@hotmail.com

RESUMO

O ensino de matemática enfrenta desafios significativos relacionados à compreensão de conceitos e à perda de interesse dos alunos. A necessidade de abordagens inovadoras é evidente, considerando as atuais dificuldades e o potencial das tecnologias digitais. Este trabalho destaca o papel das Tecnologias Digitais, com foco no Scratch, como uma ferramenta poderosa no ensino da Matemática. O Scratch, uma plataforma de programação visual, proporciona uma abordagem prática e envolvente, permitindo que alunos e professores criem projetos interativos que integram conceitos matemáticos. Revisões bibliográficas destacam o Scratch como uma ferramenta eficaz no ensino da Matemática, com resultados positivos na motivação e aprendizado dos alunos. Este trabalho propõe a criação de um projeto no Scratch para explorar triângulos, aplicando a Lei dos Cossenos e a Fórmula de Heron. A abordagem interativa visa tornar o aprendizado mais envolvente e proporcionar uma compreensão prática e visual dos conceitos trigonométricos. Este estudo contribui para a crescente base de evidências sobre a eficácia das Tecnologias Digitais, especificamente o Scratch, no contexto educacional, destacando sua aplicabilidade e benefícios no ensino da Matemática.

Palavras-chave: Tecnologias digitais. Ensino da Matemática. Software.

1 INTRODUÇÃO

Atualmente é perceptível as dificuldades enfrentadas pelos alunos na compreensão de conceitos matemáticos, combinadas com as questões sociais que amplificam a percepção da

complexidade da matéria, resultando na perda de interesse antes mesmo do início dos estudos. Diante desse cenário, a instituição de ensino compreende que não pode depender unicamente de métodos convencionais, como giz, caderno, lousa e livro. Nesse contexto, torna-se crucial buscar abordagens que envolvam e motivem os alunos, promovendo a exploração e a inovação no uso de tecnologias para aprimorar tanto o ensino quanto a aprendizagem.

No mundo moderno, os alunos têm uma grande facilidade com as tecnologias digitais. Entretanto, geralmente, eles usam essas ferramentas para buscar informações que realmente interessam a eles. Atualmente, deve-se considerar como essa abordagem pode potencializar a experiência educacional, conferindo-lhe um caráter mais envolvente, interativo e, por conseguinte, mais eficaz. Os alunos se conectarão muito mais com o conteúdo, e os professores vão perceber um avanço no aprendizado dos estudantes. É fato que atualmente, a tecnologia tem avançado consideravelmente no campo da educação. Esse avanço científico e tecnológico não deixa de apresentar - a seu modo - vários desafios à escola. Em época digital, para ter acesso a qualquer informação sobre diversos conteúdos é necessário apenas um clique, “os aprendizes deixaram de se ver como receptáculos a serem preenchidos com conteúdos; em vez disso, veem-se como criadores e realizadores” (Prensky, 2012, p. 114).

E nesse contexto tecnológico, surgem as Tecnologias Digitais aplicadas no ensino da matemática, referindo-se ao uso de recursos tecnológicos digitais para aprimorar o processo de aprendizado e ensino de conceitos matemáticos. Essas tecnologias incluem uma variedade de ferramentas, softwares e plataformas que visam tornar o ensino mais interativo, dinâmico e acessível. Um desses softwares que podemos utilizar é o Scratch. O Scratch é uma linguagem de programação visual criada para facilitar o aprendizado de programação através de blocos, criado pelo Massachusetts Institute of Technology (MIT), liderado por Mitchel Resnick, o Scratch teve sua primeira versão lançada em 2007. Tem como intuito o ensino de forma simples e divertida. É possível criar jogos, animações e histórias interativas nessa ferramenta, de forma totalmente gratuita e online, permitindo também que os usuários compartilhem os seus projetos entre si. O Scratch está traduzido para mais de 40 idiomas, incluindo o português (Scratch Brasil, 2020; Planet Code, 2020).

Segundo Tarouco (2004), o uso do Scratch como ferramenta metodológica proporciona aos alunos ou qualquer outro usuário um ambiente criativo que permite novas descobertas de uma maneira mais investigativa, cujo conhecimento seja motivado por conquistas a partir do trabalho realizado pelos próprios alunos ao executarem tarefas neste ambiente de desenvolvimento. Para Zaharija *et al.* (2013), o uso dos recursos do Scratch, permite que o indivíduo aprenda a pensar e a trabalhar de forma criativa, sistemática e colaborativa,

desenvolvendo habilidades inerentes do pensamento computacional. Essa ferramenta está sendo muito utilizada entre professores e alunos do ensino fundamental e médio, pois através da programação, é desenvolvido o uso das tecnologias digitais.

Os estudantes podem criar algoritmos visuais no Scratch, permitindo a visualização de processos matemáticos complexos. Isso é particularmente útil para compreender conceitos abstratos, como iterações e recursões. Por ser uma plataforma online, que incentiva a colaboração e o compartilhamento de projetos, os alunos podem interagir, compartilhar suas criações relacionadas à matemática e aprender uns com os outros em uma comunidade global. A criação de projetos no Scratch não se limita apenas à matemática. Os alunos podem integrar conceitos matemáticos com outras disciplinas, como ciências, linguagem e arte, promovendo uma abordagem interdisciplinar.

Nesse trabalho, o Scratch será utilizado para criar uma atividade em que os alunos programarão o desenho de triângulos, focando especialmente na Lei dos Cossenos e no cálculo de área pela Fórmula de Heron. A ideia é que, através da linguagem visual e interativa do Scratch, os estudantes possam compreender de forma mais dinâmica como a Lei dos Cossenos funciona. Eles podem programar os ângulos e os lados dos triângulos, experimentando diferentes combinações para ver como as relações trigonométricas se aplicam. Além de permitir o trabalho com propriedades interessantes dos triângulos, bem como aplicar a Fórmula da Área de Heron, a qual só depende dos lados do triângulo. Espera-se que essa abordagem não só torne a aprendizagem mais envolvente, mas também proporcione uma compreensão prática e visual dos conceitos trigonométricos, contribuindo para um aprendizado mais significativo.

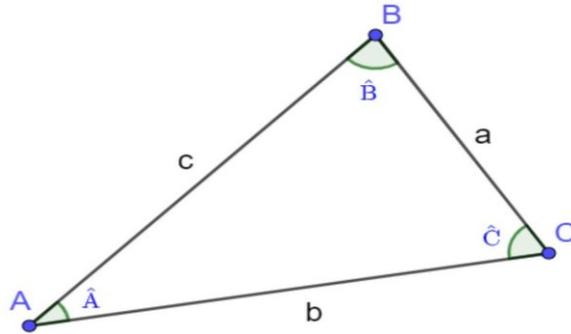
2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Um pouco sobre triângulos

Um triângulo é um polígono formado por três segmentos de reta interligados para formar três vértices e três ângulos internos. Uma definição mais formal de triângulo, dada por Dolce e Pompeu (2023) é:

Definição: Dados três pontos, A , B e C , não colineares, à reunião dos segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} dá-se o nome de triângulo ABC . Denotado o triângulo ABC , por $\triangle ABC$.

Figura 1 - Representação do triângulo ABC.



Fonte: Elaborada pelos autores.

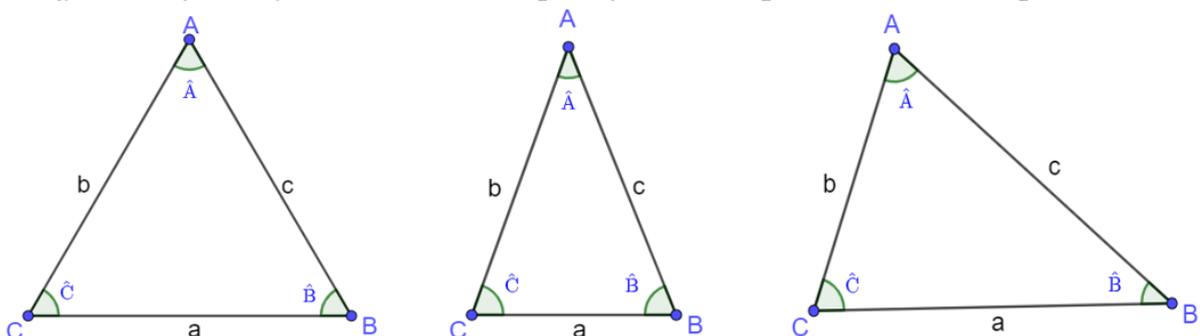
Os principais elementos de um triângulo são:

- **Vértices:** os pontos A, B e C são os vértices do $\triangle ABC$.
- **Lados:** os segmentos \overline{AB} (de medida c), \overline{AC} (de medida b) e \overline{BC} (de medida a) são os lados do triângulo.
- **Ângulos:** os ângulos \hat{A}, \hat{B} e \hat{C} são os ângulos do $\triangle ABC$ (ou ângulos internos do $\triangle ABC$).

Há diversas classificações para os tipos de triângulos, uma dessas classificações é quanto aos lados. Os que são classificados pelos lados são chamados:

- **Triângulo equilátero:** possui todos os seus três lados com comprimentos iguais;
- **Triângulo isósceles:** somente dois lados possuem o mesmo comprimento;
- **Triângulo escaleno:** possui os três lados com comprimentos diferentes.

Figura 2 - Representações, em ordem, do triângulo equilátero, triângulo isósceles e do triângulo escaleno.



Fonte: Elaborada pelos autores.

É importante considerar que há uma condição de existência para um triângulo. Essa condição de existência é a verificação específica para determinar se três segmentos de reta podem formar um triângulo. A condição afirma que a soma de quaisquer dois lados de um triângulo deve ser maior que o comprimento do terceiro lado. Então, matematicamente, para

um triângulo com lados a , b e c , a condição de existência deve satisfazer as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} a + b &> c \\ a + c &> b \\ b + c &> a \end{aligned}$$

Se essas desigualdades não forem satisfeitas, os segmentos de reta não podem formar um triângulo. Essas desigualdades também podem ser reescritas nas conhecidas desigualdades triangulares, que estabelecem que, em qualquer triângulo, o comprimento de qualquer lado é sempre menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

Uma outra propriedade importante dos triângulos, está relacionada com a soma de seus ângulos internos. A propriedade da soma dos ângulos em um triângulo é fundamental na geometria, ela diz que, para qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos seja sempre igual a 180° . Isto é, matematicamente, se \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} , representam os três ângulos internos de um triângulo, temos em todo triângulo que

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

Essa propriedade desempenha um papel crucial na resolução de problemas envolvendo triângulos, sendo frequentemente utilizada para inferir informações sobre os ângulos de um triângulo quando apenas alguns deles são conhecidos.

2.2 A lei dos cossenos

A Lei dos Cossenos é um dos princípios fundamentais aplicados na trigonometria para solucionar triângulos de forma abrangente, independentemente do tipo de triângulo (especialmente os triângulos não-retângulo). Esses conceitos são essenciais para encontrar comprimentos de lados e medidas de ângulos em triângulos arbitrários, proporcionando métodos sistemáticos para a resolução de problemas trigonométricos mais amplos.

A Lei dos Cossenos relaciona os comprimentos dos lados de um triângulo ao cosseno de um dos seus ângulos. Considerando o triângulo da Figura 1, a lei dos cossenos nos dará que:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C} \end{aligned}$$

Vale ressaltar que nos casos de triângulos isósceles ou equiláteros, essas equações podem ser simplificadas.

2.3 A fórmula de Heron

Para obter a área de um triângulo, há na geometria diversas fórmulas. Uma dessas, é a Fórmula de Heron de Alexandria, utilizada em situações em que a altura do triângulo não é conhecida, mas os comprimentos de seus lados são fornecidos.

Dado um triângulo qualquer, como na Figura 1, a fórmula de Heron para determinar a área (A) desse triângulo, é

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Sendo, p o semiperímetro do triângulo de lados a , b , e c .

2.4 Funções trigonométricas inversas (arco seno e arco cosseno)

As funções trigonométricas inversas são os opostos das funções trigonométricas tradicionais, elas são frequentemente conhecidas como funções arco e são utilizadas para encontrar os ângulos associados a certos valores trigonométricos diferentes dos tradicionais valores de seno, cosseno e tangente. Essas funções inversas relacionam um valor trigonométrico a um ângulo, dessa forma, são muito úteis para encontrar a medida de um ângulo, quando é conhecido o valor trigonométrico deste.

As duas principais funções trigonométricas inversas são o arco seno (ou inverso do seno e o arco cosseno (ou inverso do cosseno). A função inversa arco seno, é denotado $\text{sen}^{-1}(x)$ ou $\text{arcsen}(x)$, e é tal que,

$$x = \text{sen}(y) \Leftrightarrow y = \text{arcsen}(x)$$

Essa função arco seno recebe um valor trigonométrico $[-1,1]$ como argumento e retorna o ângulo cujo seno é igual a esse valor. Com intervalos de resultados $-1 \leq x \leq 1$, então $\frac{-\pi}{2} \leq \text{arcsen}(x) \leq \frac{\pi}{2}$

A função inversa arco cosseno, é denotado por $\text{cos}^{-1}(x)$ ou $\text{arccos}(x)$, ela é definida tal que,

$$x = \text{cos}(y) \Leftrightarrow y = \text{arccos}(x)$$

A função arco cosseno recebe um valor trigonométrico $[-1,1]$ como argumento e retorna o ângulo cujo cosseno é igual a esse valor. Com intervalos de resultados $-1 \leq x \leq 1$, então $0 \leq \text{arccos}(x) \leq \pi$.

Um exemplo de aplicação para a função arco cosseno, poderia ser encontrar um ângulo do triângulo por meio de seus lados e pela lei dos cossenos. Considerando, as Equações da lei dos cossenos, por exemplo, poderíamos escrever o ângulo \hat{A} como:

$$A = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

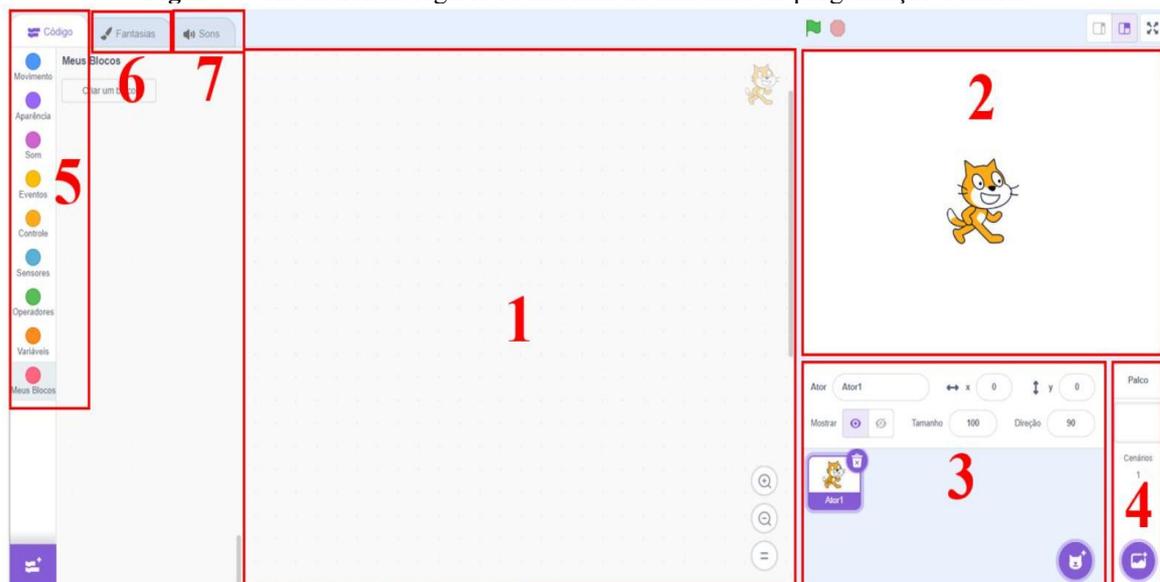
Consequentemente, podemos escrever \hat{B} e \hat{C} de forma análoga, e assim obter esses ângulos conhecendo apenas os lados do triângulo.

2.5 O Scratch

O Scratch é uma plataforma de programação visual que permite às pessoas criar seus próprios jogos, animações e histórias interativas. Desenvolvido pelo MIT, o Scratch usa blocos de código coloridos que são arrastados e encaixados para criar scripts de programação. Isso torna a programação mais acessível, especialmente para iniciantes, já que não é necessário digitar linhas de código. Por trás desses blocos existem diferentes códigos, como movimento, aparência, som, controle etc. Isso permite que os usuários construam programas sem a necessidade de digitar código manualmente, tornando a programação mais acessível para pessoas que estão começando a aprender. O ambiente de programação Scratch também inclui uma área de palco, onde os usuários podem criar personagens, animações e jogos.

Na Figura 3, observa-se a janela do Scratch com seus diferentes ambientes de trabalho. A programação na plataforma é realizada de forma predominantemente visual e lúdica, o que contribui significativamente para o ensino de programação a crianças em níveis iniciais de aprendizagem.

Figura 3 - As diferentes regiões de trabalho no ambiente de programação Scratch.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Região (1): Essa é a área do código. Nesse local, os blocos de comando que serão utilizados são montados e organizados.

Região (2): O palco funciona como uma tela na qual os atores e o cenário seguem as instruções previamente programadas por meio de blocos. Para iniciar a execução do código, basta clicar na bandeira verde localizada no canto superior esquerdo do palco; enquanto para interromper o programa, é suficiente clicar no círculo vermelho.

Região (3): Aba de configuração de atores, referimo-nos aos personagens ou elementos que participam na interação com o cenário do programa. Alguns exemplos de atores incluem o gato no Scratch, uma bola, um bolo, uma mesa, uma boneca, e assim por diante.

Região (4): Configurações do palco. É possível criar, editar, realizar uploads ou excluir cenários.

Região (5): Os blocos de código representam peças fundamentais na programação no Scratch, sendo responsáveis por organizar os comandos a serem executados. Existem nove categorias de blocos, delineadas nos tópicos abaixo:

- Movimento: Estes blocos possibilitam a movimentação dos atores no cenário.
- Aparência: Comandam a maneira como o ator será visualizado.
- Som: Provocam ações sonoras no cenário.
- Evento: Blocos que ocorrem apenas em resposta a eventos ou situações específicas.
- Controle: Estruturam o código de maneira lógica, de acordo com restrições ou situações específicas.
- Sensores: Utilizados para perceber alterações no ator ou no cenário.
- Operadores: Blocos lógicos que permitem operações como comparações (maior que, menor que, igual), cálculos matemáticos, entre outras opções.
- Variável: Blocos criados pelo programador para armazenar dados.
- Meus Blocos: Diversos blocos personalizados criados pelo programador.

Região (6): Nessa seção de “Configuração de Fantasias”, o usuário tem à disposição as ferramentas de edição e criação de trajés para o ator selecionado.

Região (7): Na seção “Configuração de Sons”, o programador tem a capacidade de gravar, fazer upload, selecionar entre os sons disponíveis no Scratch, editar e excluir sons.

O Scratch está muito relacionado também com as tecnologias digitais em Matemática, com a utilização de blocos de programação visual que representam diferentes comandos e operações, permitindo que os professores e alunos criem projetos que envolvam conceitos matemáticos, como operações aritméticas, geometria e lógica, através de uma abordagem

prática e visual. A sua programação promove o desenvolvimento do pensamento computacional, que inclui habilidades como resolução de problemas, decomposição de tarefas, reconhecimento de padrões e abstração. Essas habilidades são transferíveis e beneficiam o entendimento e aplicação de conceitos matemáticos. Ele proporciona um ambiente de aprendizado ativo, onde os alunos não apenas consomem informações, mas também criam projetos interativos. Essa abordagem lúdica torna o aprendizado da matemática mais envolvente e motivador, onde o aluno se interessa por aprender.

O Scratch se destaca como um instrumento robusto no ensino da matemática, impulsionado por diversos fatores que convergem para proporcionar uma vivência de aprendizado tangível e cativante. Aqui estão algumas razões que destacam a importância do Scratch no contexto do ensino da matemática:

1. **Visualização de Conceitos Abstratos:** O Scratch permite aos alunos visualizarem conceitos matemáticos de forma palpável. A representação gráfica de algoritmos e fórmulas facilita a compreensão de conceitos abstratos, tornando a matemática mais acessível.
2. **Aplicação Prática de Conceitos Matemáticos:** Os alunos podem aplicar conceitos matemáticos ao criar projetos interativos no Scratch. Por exemplo, eles podem usar operadores matemáticos em scripts para controlar movimentos, animações e interações, fornecendo uma aplicação prática dos conceitos matemáticos.
3. **Resolução de Problemas:** A programação no Scratch incentiva a resolução de problemas, uma habilidade fundamental na matemática. Os alunos enfrentam desafios ao desenvolverem seus projetos, estimulando o pensamento crítico e analítico.
4. **Desenvolvimento de Algoritmos:** A criação de scripts no Scratch envolve o desenvolvimento de algoritmos, que estão intrinsecamente ligados à lógica matemática. Os alunos podem aprimorar suas habilidades algorítmicas enquanto criam e experimentam com diferentes sequências de comandos.
5. **Interdisciplinaridade:** O Scratch permite a integração de conceitos matemáticos com outras disciplinas, criando projetos multidisciplinares. Essa abordagem interdisciplinar incentiva a aplicação prática da matemática em contextos do mundo real.

Diversos autores trabalharam com o uso de Scratch para o ensino da matemática. Pinto (2010) trabalha com foco na integração do desenvolvimento de jogos com o ensino de matemática, utilizando a plataforma Scratch. Os resultados indicam um aumento significativo no interesse pela disciplina de matemática, além de despertar o interesse em criar jogos para outras disciplinas. Uma revisão bibliográfica realizada por Carmo Narciso *et al.* (2023), destaca

a importância de repensar abordagens tradicionais no ensino de matemática, especificamente na geometria, e sugere que o Scratch pode ser uma ferramenta pedagógica eficaz para esse fim.

O trabalho de Gonçalves (2023), destaca a flexibilidade e a riqueza de recursos que o Scratch proporciona, incentivando a colaboração e o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, apresentando um plano de aula que serve como um exemplo prático da integração bem-sucedida desses objetos de aprendizagem em uma aula de Matemática. Em especial na geometria plana, Ferreira (2018) apresenta um estudo exploratório de natureza qualitativa que investiga o impacto da linguagem de programação Scratch no aprendizado das áreas de figuras planas, sugerindo que a integração do Scratch no ensino de matemática pode ser uma estratégia eficaz para engajar os alunos, estimular a aprendizagem ativa e desenvolver habilidades cognitivas e criativas.

3 PERCURSO METODOLÓGICO

A construção interativa no Scratch proposta neste trabalho, consiste em construir um código em que inserimos os três lados do triângulo, e o programa identifica se o triângulo é possível, qual a classificação do triângulo com relação aos lados e a área desse triângulo. O projeto apresentado neste trabalho pode ser encontrado em <https://scratch.mit.edu/projects/960443496>. O código Scratch tem algumas partes importantes, vamos descrever cada uma das partes a seguir.

A Figura 4 apresenta a fase inicial do nosso projeto, na qual forneceremos comandos ao nosso ator. Começaremos colocando o bloco de clique na bandeira para dar início ao projeto. Em seguida, definiremos a posição inicial, direção e tamanho do nosso ator. Também definiremos as variáveis referentes aos lados dos triângulos e sua área. Os blocos subsequentes são a interação com o usuário, solicitando que faça a escolha dos três lados do triângulo.

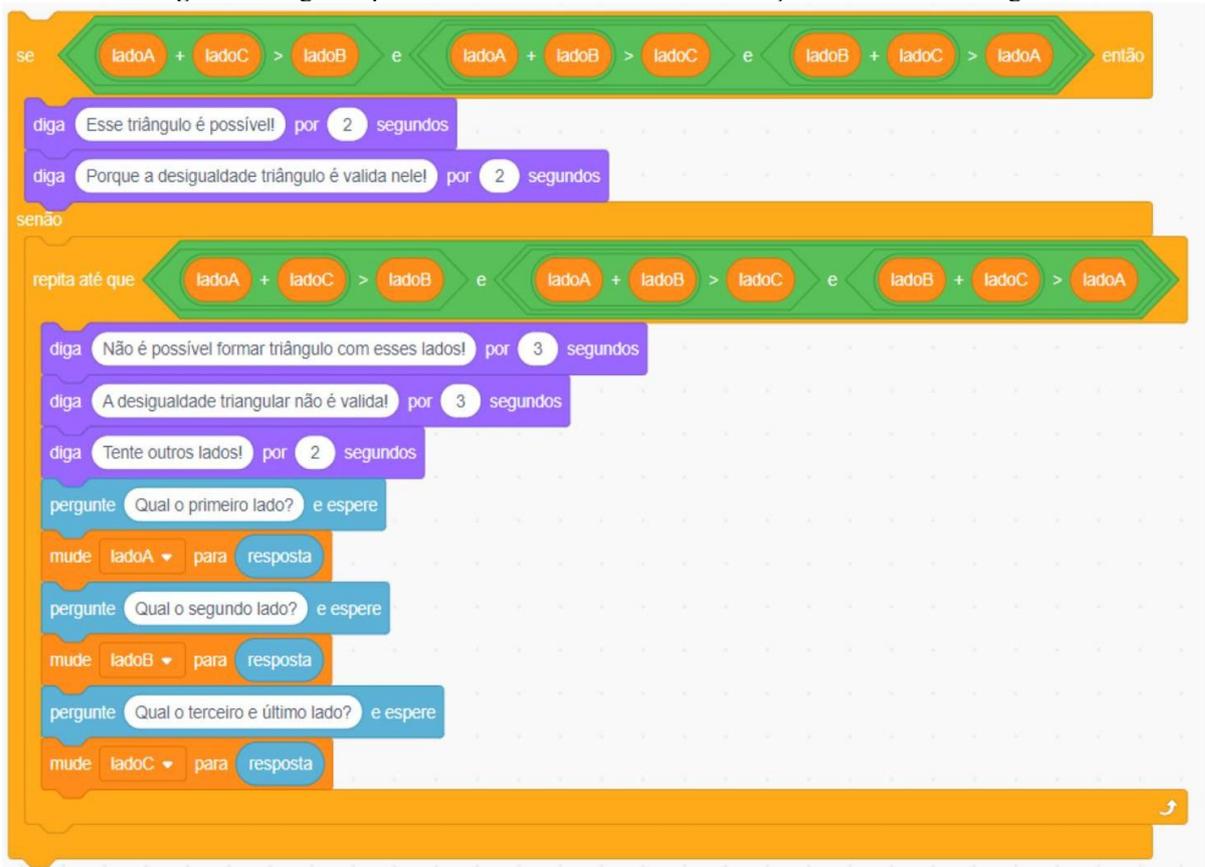
Na Figura 5 é exibido a parte do código onde verifica-se a condição de existência do triângulo, isto é, se a desigualdade triangular dos lados é válida e dessa forma confirmar se com os três lados digitados será possível construir o triângulo. Caso a desigualdade seja válida, haverá mensagens informando a validade da desigualdade, e o código irá continuar para a próxima etapa. Entretanto, caso a desigualdade não seja válida, uma mensagem irá informar que não é possível construir o triângulo, pois a desigualdade triangular não é válida. Em seguida, será perguntado e solicitado que digite novamente os três lados do triângulo que desejamos construir. Essa etapa de conferência da desigualdade triangular, irá continuar até que ela seja satisfeita.

Figura 4 - Primeira parte dos blocos utilizados na construção interativa do triângulo.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 5 - Segunda parte dos blocos utilizados na construção interativa do triângulo.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Agora, será iniciado uma sequência de condicionais, onde em cada condição será analisado o tipo de triângulo quanto aos lados, e assim, definiremos a estratégia para seu desenho. A Figura 6, exibe essa sequência de blocos condicionais (vazios). Perceba-se que haverá condições "dentro das condições".

A próxima fase é apresentada na Figura 7, nesta fase, ao receber os valores inseridos pelo usuário para os três lados do triângulo, o sistema realizará uma verificação. Se os valores satisfizerem a condição de terem todos os lados iguais, uma mensagem será exibida informando que o triângulo é equilátero. Esta conclusão é baseada na característica essencial de um triângulo equilátero, que possui todos os seus lados com comprimentos idênticos. Em seguida, o algoritmo irá desenhar um desenho representativo do triângulo equilátero, proporcionando uma ilustração clara das propriedades geométricas específicas associadas a essa classificação. Veja que programamos um giro de 120° pois nos triângulos equiláteros todos os ângulos são de 60° , e, como nosso ator está andando externo a esse ângulo, ele vira $120^\circ(180^\circ - 60^\circ)$.

Figura 6 - Blocos lógicos encaixados necessários na construção.



Fonte: Elaborada pelos autores.

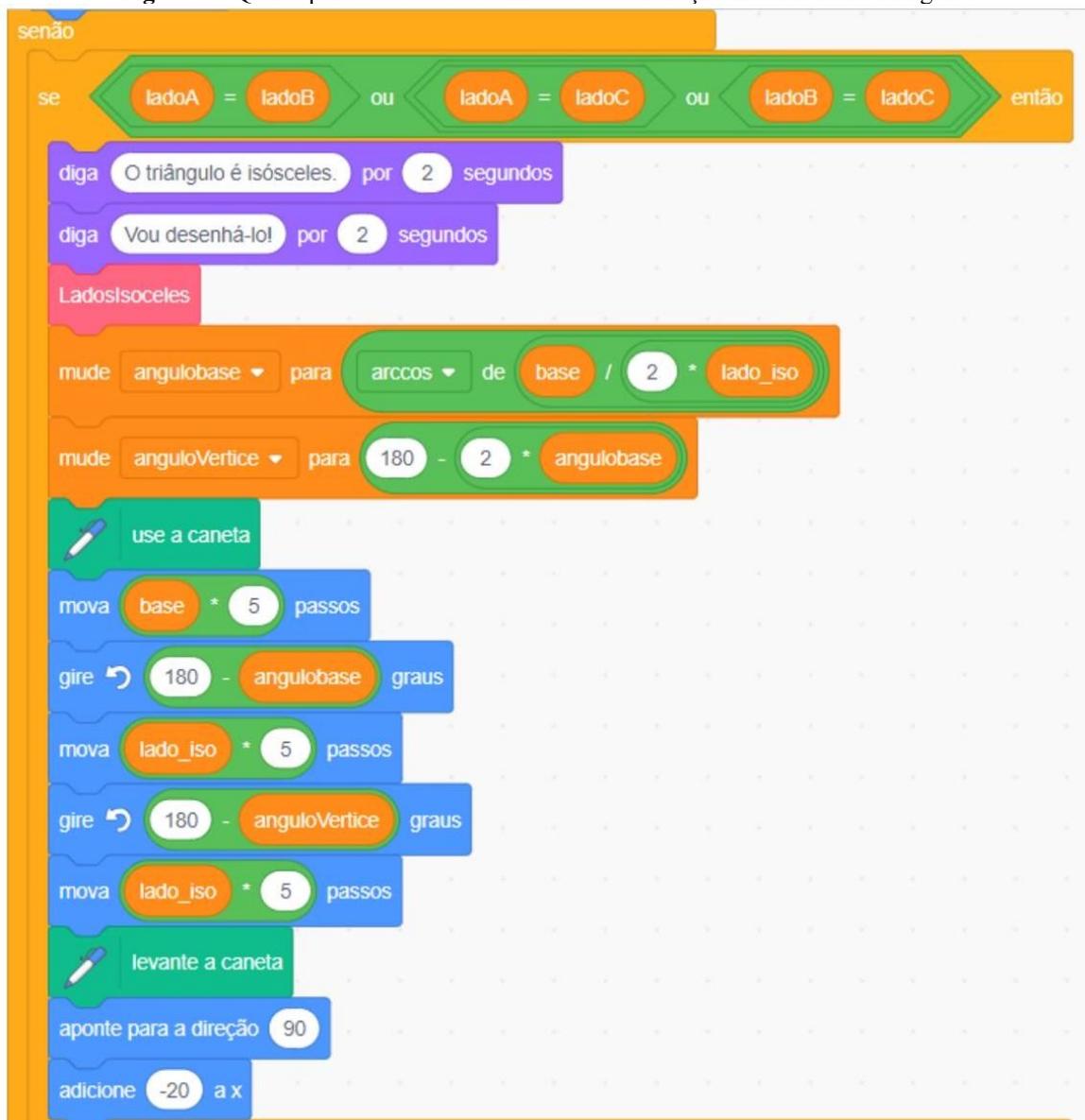
Figura 7 - Terceira parte dos blocos utilizados na construção interativa do triângulo.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Dando sequência no código, a Figura 8, mostra o bloco onde será analisado se no projeto, caso o usuário opte por selecionar dois lados iguais e um terceiro diferente, uma mensagem será exibida indicando que o triângulo é isósceles, conforme a definição. Após essa verificação inicial, o sistema procederá ao cálculo dos ângulos do triângulo. Para realizar essa tarefa, serão empregadas a Lei dos Cossenos e a função inversa do arco cosseno. Essas ferramentas matemáticas permitirão determinar os valores dos ângulos do triângulo isósceles com precisão. Nesse código, há um bloco chamado “LadosIsosceles” que foi construído pelos autores, ele é apresentado na Figura 10. Por fim, o sistema gerará um desenho representativo do triângulo isósceles.

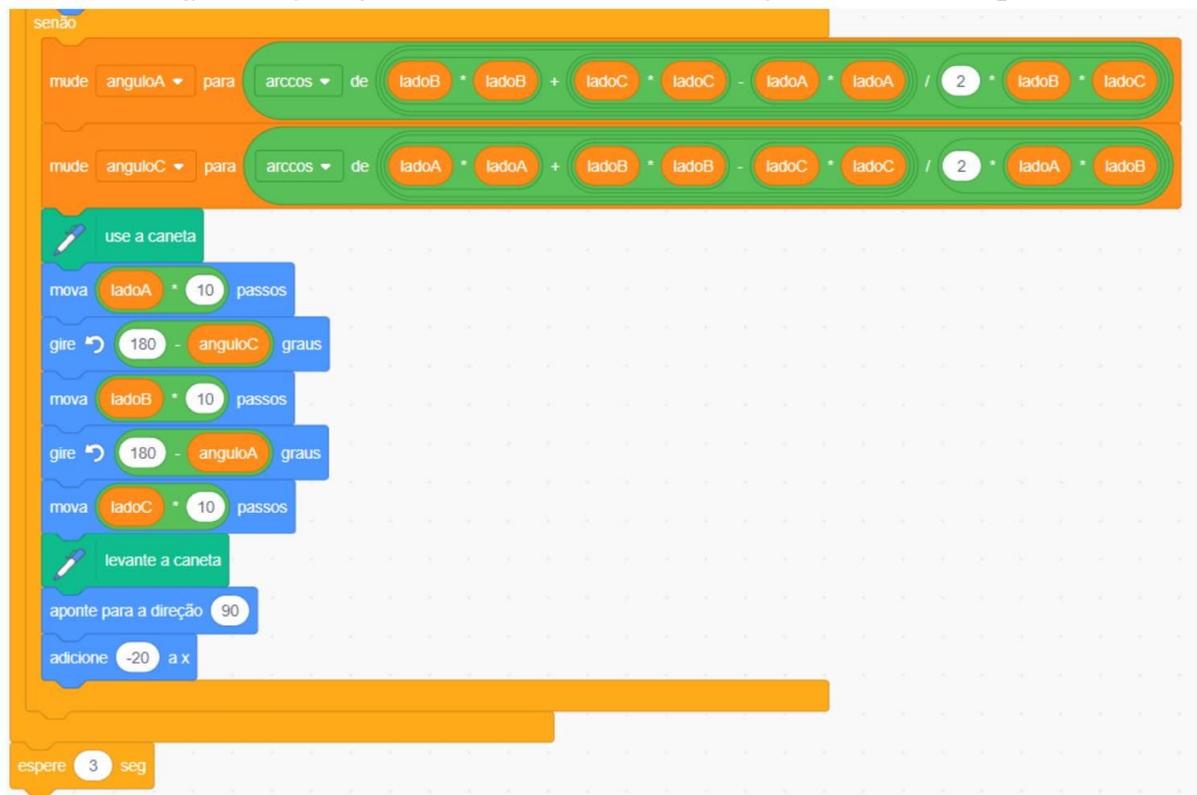
Figura 8 - Quarta parte dos blocos utilizados na construção interativas do triângulo.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Chegou a hora de trabalhar com triângulos escalenos, buscaremos determinar os ângulos de um triângulo genérico. Essa etapa é exibida na Figura 9. Para realizar essa tarefa, empregaremos a Lei dos Cossenos, e a função trigonométrica inversa do arco cosseno. Uma vez que tenhamos identificado pelo menos dois ângulos por meio das propriedades anteriores, faremos uso da Propriedade da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo para calcular o terceiro ângulo. E assim, com as medidas dos ângulos e com os lados dos triângulos, podemos construir o terceiro e último caso de triângulo considerado nessa construção.

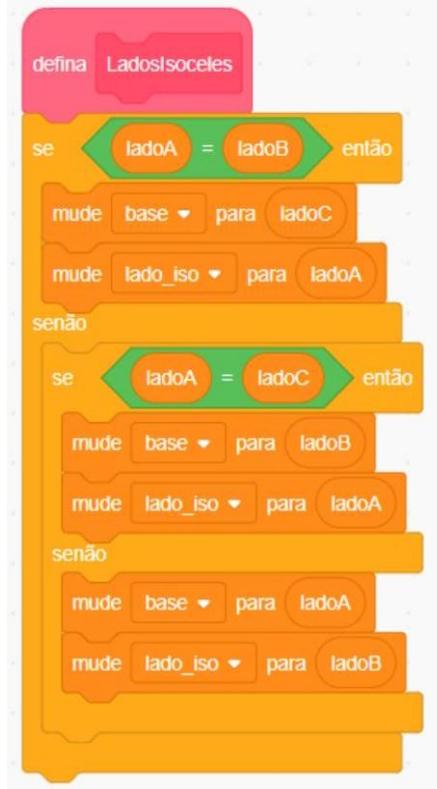
Figura 9 - Quinta parte dos blocos utilizados na construção interativa do triângulo.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Nesta etapa, vamos construir um bloco baseado na definição dos lados isósceles e identificar qual será a base desse triângulo, isso será útil para desenhar o triângulo. A Figura 10, exibe esse bloco construído e chamado de "LadosIsosceles". Esse bloco foi utilizado na Figura 8. Os lados isósceles referem-se a dois lados de um triângulo que possuem comprimentos iguais. Nesse código, identificaremos quais são os lados iguais, e o diferente será determinado como a base do triângulo. Conhecer os lados iguais e a base do triângulo isósceles é essencial para a construção deste, sendo uma configuração única do triângulo isósceles. Ao definir claramente todos esses elementos, buscamos proporcionar uma compreensão abrangente das características geométricas fundamentais do triângulo em questão.

Figura 10 - Bloco exclusivo de uso nessa construção.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Chegamos ao término do nosso projeto, atingindo o objetivo desejado de calcular a área do triângulo. Para realizar esse cálculo em triângulos que não possuem o valor da altura, mas têm conhecimento dos três lados, estamos utilizando a fórmula de Heron. Após a execução dos cálculos necessários, uma mensagem será apresentada, indicando a área aproximada do triângulo. Esse ponto marca o encerramento do processo, fornecendo uma resposta clara e aproximada sobre a medida da área desse triângulo específico.

Figura 11 - Sexta parte dos blocos utilizados na construção interativas do triângulo.



Fonte: Elaborada pelos autores.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização de tecnologias digitais, como o Scratch, no ensino da matemática tem se mostrado uma estratégia eficaz para superar desafios enfrentados pelos alunos na compreensão

de conceitos matemáticos. A integração dessas ferramentas promove um ambiente de aprendizado mais envolvente e motivador, incentivando a exploração e a inovação no processo de ensino e aprendizagem. A plataforma Scratch, ao ser utilizada como uma ferramenta pedagógica, permite que os alunos não apenas consumam informações, mas também criem projetos interativos, desenvolvendo habilidades fundamentais do pensamento computacional.

Ao explorar a linguagem visual e interativa do Scratch, os estudantes têm a oportunidade de compreender de forma mais dinâmica conceitos matemáticos complexos, como a Lei dos Cossenos e a Fórmula de Heron. A criação de algoritmos visuais facilita a visualização de processos matemáticos abstratos, contribuindo para um entendimento mais prático e significativo.

A proposta de atividade apresentada neste trabalho, que utiliza o Scratch para calcular a área do triângulo, programar o desenho de triângulos e explorar conceitos como a Lei dos Cossenos e a Fórmula de Heron, representa uma aplicação prática e inovadora. A plataforma não se limita apenas à matemática pura, mas permite a integração de conceitos matemáticos com outras disciplinas, promovendo uma abordagem interdisciplinar.

Ao revisitar o papel do Scratch na promoção do pensamento computacional, destacamos que essa habilidade vai além da programação. Ela envolve a capacidade de analisar problemas, decompor tarefas, identificar padrões e abstrair conceitos – competências essenciais que se alinham harmoniosamente com os objetivos do ensino de matemática.

Em síntese, a proposta de integrar o Scratch no ensino de matemática não é apenas uma adaptação ao ambiente digital, mas uma evolução no paradigma educacional. Ao capacitar os alunos a serem criadores e solucionadores de problemas, o Scratch não apenas facilita o aprendizado da matemática, mas também prepara os estudantes para os desafios e oportunidades do futuro.

REFERÊNCIAS

DOLCE, O.; POMPEU, J. N. Fundamentos de matemática elementar: volume 9. 9. ed. São Paulo: Atual, 2023.

DO CARMO NARCISO, A. L.; DO CARMO NARCISO, L.; VIEIRA NARCISO, A. L. O uso da programação no ensino de geometria através do software Scratch: uma revisão de literatura. **Anais do Encontro Virtual de Documentação em Software Livre e Congresso Internacional de Linguagem e Tecnologia Online**, [S. l.], v. 11, n. 1, 2023. Disponível em: <https://ciltec.textolivre.pro.br/index.php/CILTecOnline/article/view/1116>. Acesso em: 4 jul. 2025.

FERREIRA, W. C.; OLIVEIRA, C. A. de. O Scratch nas aulas de matemática: caminhos possíveis no ensino das áreas de figuras planas. **Cadernos Cenpec**: Nova Série, v. 8, n. 1, 2018. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.18676/cadernoscenpec.v8i1.390>. Acesso em: 12 jan. 2024.

EXEMPLIFICANDO o uso de objetos de aprendizagem Scratch no ensino de sequências numéricas nos anos iniciais. In: ENCONTRO PARANAENSE DE TECNOLOGIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2023, Apucarana. **Anais....** Apucarana: UNESPAR, 2023. Disponível em: <https://sbemparana.com/arquivos/anais/eptem3/anais/1577-7639-1-PB.pdf>. Acesso em: 14 jan. 2024.

PINTO, A. S. **Scratch na aprendizagem da matemática no 1.º ciclo do ensino básico: estudo de caso na resolução de problemas**. 2010. Dissertação (Mestrado em Estudos da Criança) - Universidade do Minho, Braga, 2010. Disponível em: <http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/14538/1/tese.pdf>. Acesso em: 12 jan. 2024.

PLANET CODE. **O que é o Scratch?** 2020. Disponível em: <https://planetcode.com.br/o-que-o-scratch/>. Acesso em: 14 jan. 2024.

PRENSKY, M. **Aprendizagem baseada em jogos digitais**. São Paulo: Senac São Paulo, 2021.

SCRATCH BRASIL. **O que é Scratch?** 2020. Disponível em: <https://scratchbrasil.org.br/o-que-e-scratch/>. Acesso em: 14 jan. 2024.

TAROUCO, L.; *et al.* Jogos educacionais. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 2, n. 1, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.22456/1679-1916.13719>. Acesso em: 20 dez. 2023.

ZAHARIJA, G.; *et al.* Introducing basic programming concepts to elementary school children. **Procedia – Social and Behavioral Sciences**, v. 106, p. 1576-1584, 2013.

CAPÍTULO VII

UMA INTRODUÇÃO AOS QUADRADOS LATINOS

DOI: 10.51859/amplla.epm963.1125-7

Lucas Henrique Mendes Alves
lucas.henriquem77@gmail.com

Anderson Novaes Martinhão
andersonmartinhao@ufgd.edu.br

Marcos Vinicius de Oliveira Peres
mvoperes@uem.br

Talisson Fernando Leiria
talisson_leiria@hotmail.com

RESUMO

Este artigo apresenta como tema central o estudo dos quadrados latinos. Tem como objetivo estudar as definições que fundamentam esse conteúdo dentro da matemática, explorar suas propriedades notáveis, essenciais em design experimental, estatística, entre outras áreas, além de estender uma análise destacando a relação entre os quadrados latinos ortogonais e problemas enfrentados pelos matemáticos ao longo dos anos. Essas estruturas matemáticas, inicialmente desenvolvidas para resolver questões práticas em experimentos e jogos, evoluíram para uma disciplina independente, com amplas implicações em diversas áreas. Uma dessas áreas é o jogo Sudoku, algo intimamente relacionado com quadrados latinos e que vamos comentar de maneira breve em nossa pesquisa. Abordando a existência de quadrados latinos, esse trabalho oferecerá oferecer uma base sólida para aplicações e práticas futuras, evidenciando a relevância constante dos quadrados latinos na pesquisa matemática.

Palavras-chave: Matemática. Quadrados Latinos Ortogonais. Sudoku.

1 INTRODUÇÃO

Na área da matemática discreta, os quadrados latinos são muito importantes e devem ser estudados (Evans, 2018). Eles são estruturas matemáticas que vão além das áreas como estatística, teoria dos números e álgebra. Neste trabalho, vamos nos aprofundar nessas ideias, explorando como elas funcionam e o quão complicadas podem ser. Os quadrados latinos têm uma história que está ligada aos esforços persistentes de muitos matemáticos ao longo dos anos, que tentaram entender padrões e estruturas em arranjos simbólicos. A primeira utilização de quadrados latinos em problemas práticos dizia respeito ao problema de colocar as dezesseis cartas de um baralho comum na forma de um quadrado, de modo que nenhuma linha, coluna ou diagonal contenha mais de uma carta de cada naipe nem uma carta de cada valor (Keedwell;

Dénes, 1974). Porém, o que nos motivou a fazer essa pesquisa foi o problema proposto pelo matemático Leonhard Euler.

Em 1782, Euler apresentou um problema como uma questão combinatória que intrigou a comunidade matemática da época. O problema dos 36 oficiais, proposto por Euler, envolve organizar 36 oficiais em um quadrado de ordem 6 (6 colunas e 6 linhas). Cada oficial pertence a uma de 6 patentes e a um de 6 regimentos, e o objetivo era colocar esses oficiais de modo que cada posição no quadrado contenha um oficial de uma patente e um regimento diferentes, sem repetições. Para resolver isso, são necessários dois quadrados latinos de ordem 6, representando as patentes e regimentos.

Cada oficial deve ser único em termos de patente e regimento, e os dois quadrados latinos devem se sobrepor de uma maneira específica (em outras palavras, devem ser ortogonais). Em resumo, o desafio é organizar os 36 oficiais de maneira que cada posição no quadrado contenha um oficial de patente e regimento diferentes, respeitando as condições estabelecidas por Euler (Alegri, 2006). Isso é um exemplo de aplicação prática da teoria dos quadrados latinos na matemática discreta, e investigaremos ao longo do texto se ela possui ou não solução.

Os quadrados latinos, de maneira geral, são objetos matemáticos – conceitos que podem ser definidos e relacionados através de propriedades e operações matemáticas – que possuem propriedades notáveis e desempenham um papel crucial em diversas áreas, incluindo design experimental, criptografia e estatística. Neste contexto, vamos explorar as definições e propriedades dos quadrados latinos, assim como sua ortogonalidade e, além disso, destacar a sua relevância persistente na pesquisa matemática e científica.

Vamos também investigar a relação entre quadrados latinos e um passatempo que ganhou popularidade global: o Sudoku. O Sudoku, enquanto jogo de lógica numérica, está intrinsecamente ligado aos quadrados latinos, visto que as propriedades fundamentais dos quadrados latinos se manifestam no contexto do Sudoku.

Este estudo oferece uma oportunidade para aprofundar nosso entendimento das estruturas matemáticas que permeiam os quadrados latinos, proporcionando uma base sólida para aplicações práticas e inovações futuras.

2 QUADRADOS LATINOS

Os quadrados latinos foram historicamente importantes em uma variedade de campos, desde a agricultura até a criptografia, devido à sua capacidade de organizar informações de

maneira estruturada, evitando repetições em linhas e colunas (Keedwell; Dénes, 1974). Para aprofundar mais no assunto, vamos definir formalmente o que são quadrados latinos.

Definição 1. *Seja Q um conjunto finito de cardinalidade n . Dizemos que uma matriz quadrada de ordem n é um quadrado latino de ordem n quando todas as linhas e todas as colunas formam permutações dos n elementos de Q .*

Em outras palavras, um quadrado latino é uma matriz onde cada entrada contém um símbolo ou número, e cada símbolo ou número aparece exatamente uma vez em cada linha e em cada coluna da matriz (Stinson, 2004). A principal característica é que não há repetição de símbolos dentro da mesma linha ou coluna.

Exemplo 1. Seja $Q = \{1,2,3\}$ um conjunto. As matrizes quadradas a seguir (A e B) são quadrados latinos de ordem 3, visto que todas as linhas e todas as colunas são permutações dos três elementos de Q .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

As matrizes quadradas a seguir (C e D) não são quadrados latinos. Na matriz C , a segunda linha não forma uma permutação de todos os elementos de Q e na matriz D , a primeira e a segunda linha não formam permutações dos três elementos de Q .

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A partir do momento em que entendemos a estrutura de um quadrado latino, vem a dúvida: Para qualquer número natural n , existe um quadrado latino de ordem n ? Para responder isso, temos a seguinte proposição.

Proposição 1. Para todo número natural n , existe um quadrado latino de ordem n .

Demonstração. Vamos construir um quadro latino de ordem n . Seja

$$(1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n-1 \ n)$$

a primeira linha da matriz. As outras linhas podem ser obtidas deslocando ciclicamente para a direita 1,2, ..., $n-1$ posições. Ao final, obtemos o quadrado latino

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, a Proposição 1 implica que as condições definidas anteriormente são atendidas para qualquer valor de n , garantindo a existência de tais quadrados latinos para todos os números naturais. Existem diversas maneiras de criar novos quadrados latinos a partir de quadrados latinos existentes.

Ao permutar as linhas ou colunas de um quadrado latino, obtemos outro quadrado latino. Se substituirmos os símbolos do quadrado latino por outro conjunto de símbolos da mesma cardinalidade, o resultado também será um quadrado latino, sendo essas operações flexíveis na manipulação dos quadrados latinos, permitindo a geração de diversas variantes a partir de um quadrado latino original (Evans, 2018). Segue abaixo um exemplo para $n = 4$.

Exemplo 2. Vamos montar um quadrado latino de ordem $n = 4$. Vamos considerar a primeira linha do quadrado latino como sendo

$$(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$$

Desse modo, pela Proposição 1, basta rotacionar a primeira linha para a direita $n - 1$ vezes, ou seja, 3 vezes encontrando então o seguinte quadrado latino

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Vale lembrar que as entradas de um quadrado latino não precisam ser obrigatoriamente números, podendo ter em suas entradas letras ou símbolos desde que respeitem suas propriedades (Alegri, 2006). Ao exploramos propriedades específicas de um quadrado latino de ordem n , destacamos duas características notáveis que podem ser definidas da seguinte maneira:

Definição 2. Suponhamos que $L = (l_{ij})$ é um quadrado latino de ordem n .

1. Dizemos que L é idempotente se $l_{ii} = i$ para todo $1 \leq i \leq n$.
2. Dizemos que L é simétrico se $l_{ij} = l_{ji}$ para todos $1 \leq i, j \leq n$.

Podemos entender o Item 1 da Definição 5 da seguinte maneira: um quadrado latino idempotente sobre um conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ é da forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ * & 2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Já o Item 2, é um tipo especial de quadrado latino onde as entradas em relação a diagonal principal são simétricas, ou seja, as entradas são as mesmas se você inverter as linhas pelas colunas (a matriz coincide com a sua transposta).

Em resumo, no estudo de quadrados latinos, seus variantes simétricos e idempotentes não só contribuem para a teoria matemática, mas também possui aplicações práticas em uma ampla gama de campos, tornando-os objetos de interesse em pesquisa e desenvolvimento.

Exemplo 3. Seja $Q = \{1,2,3\}$ um conjunto. Existem exatamente 12 quadrados latinos definidos sobre Q a saber:

$$\begin{aligned} L_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & L_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & L_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ L_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & L_5 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & L_6 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ L_7 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & L_8 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & L_9 &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ L_{10} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & L_{11} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & L_{12} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

O único quadrado latino idempotente acima é o L_4 e os quadrados latinos L_1, L_4, L_5, L_8 e L_9 e L_{12} são simétricos.

3 QUASEGRUPOS

Um quasegrupo é uma estrutura algébrica que pode ser usada para visualizar ou representar os quadrados latinos. Quasegrupos e quadrados latinos são conceitos intercambiáveis ou equivalentes, simplificando assim a compreensão e análise dessas estruturas matemáticas (Stinson, 2004). Para ficar mais claro, vamos definir de maneira formal um quasegrupo.

Definição 3. Sejam X um conjunto finito de cardinalidade n e \circ uma operação binária definida em X . Dizemos que o par (X, \circ) é um quasegrupo de ordem n desde que as duas propriedades a seguir sejam satisfeitas:

1. Para cada $a, b \in X$, a equação $a \circ y = b$ tem uma solução única $y \in X$;
2. Para cada $a, b \in X$, a equação $x \circ a = b$ tem uma solução única $x \in X$.

É fundamental destacar que as concepções de quasegrupos e quadrados latinos oferecem duas perspectivas distintas sobre um mesmo fenômeno, sendo quadrados latinos algo mais no ramo da lógica e, quasegrupos, algébrico (Stinson, 2004). Nessa pesquisa, utilizaremos ambos os pontos de vista em diferentes momentos.

É claro que todo grupo é um quasegrupo, porém não vamos adentrar nesse assunto de maneira formal. Abaixo, segue um exemplo de um grupo, onde sua tábua de operações é um quasegrupo.

Exemplo 4. Considere o conjunto dos números naturais e a operação de adição modular mod 4. Ou seja, estamos olhando para os restos das divisões por 4. Temos que $(Z_4, +)$ é um grupo e sua tábua é dada por:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Neste exemplo, o conjunto $\{0,1,2,3\}$ munido com a operação $+$ forma um quasegrupo finito. A ideia é que cada elemento do quasegrupo, ou seja, os números da sua tábua de operações, aparece exatamente uma vez em cada linha e uma vez em cada coluna da matriz. Isso fica claro quando consideramos o seguinte resultado.

Teorema 1. Suponha que \circ seja uma operação binária definida em um conjunto finito X de cardinalidade n . Então (X, \circ) é um quasegrupo se, e somente se, sua tábua for um quadrado latino de ordem n .

Demonstração. Ver Stinson (2004).

Ao garantir que cada elemento do quasegrupo apareça apenas uma vez em cada linha e uma vez em cada coluna, a matriz resultante segue as propriedades de um quadrado latino. Em um quadrado latino, cada elemento também aparece apenas uma vez em cada linha e em cada coluna. Portanto, a tábua de um quasegrupo pode ser considerada um quadrado latino devido à distribuição única dos elementos ao longo das linhas e colunas da matriz resultante (Keedwell; Dénes, 1974).

Como há uma correspondência natural entre tais conceitos, a partir de agora, não distinguimos quasegrupo e quadrado latino. Observe por esse teorema que a tábua de operações do Exemplo 8 forma um quadrado latino, por conta disso, admitimos naquele momento que o grupo era um quasegrupo. Naturalmente, podemos definir os conceitos de quadrados latinos idempotentes e simétricos no contexto dos quasegrupos.

Definição 4. Suponhamos que (X, \circ) é um quasegrupo.

1. Dizemos que (X, \circ) é idempotente se $x \circ x = x$ para todo $x \in X$.

2. Dizemos que (X, \circ) é simétrico se $x \circ y = y \circ x$ para todos $x, y \in X$.

Podemos nos perguntar se para todo natural n existe um quasegrupo que é idempotente e simétrico ao mesmo tempo. A resposta é dada pelos próximos lemas.

Lema 1. Se existe um quasegrupo de ordem n simétrico e idempotente, então n é ímpar.

Demonstração. Suponhamos que (X, \circ) é um quasegrupo simétrico e idempotente de ordem n . Fixado $z \in X$, definimos

$$S = \{(x, y) \in X \times X : x \circ y = z\}$$

Visto que (X, \circ) é idempotente, segue que $(x, x) \in S$ se, e somente se, $x \circ x = z$, isto é, $x = z$. Como (X, \circ) é simétrico, segue que $(x, y) \in S$ se, e somente se, $(y, x) \in S$. Portanto, $\{\{x, y\} : x \neq y \text{ e } x \circ y = z\}$ é uma partição de $X \setminus \{z\}$ em conjuntos de cardinalidade 2. Portanto, $|X| - 1$ é um número par, logo $|X| = n$ é ímpar.

Lema 2. Se n é ímpar, então existe um quasegrupo de ordem n simétrico e idempotente.

Demonstração. Consideremos n um número ímpar e o grupo aditivo Z_n . Como $(Z_n, +)$ é um grupo, ele é automaticamente um quasegrupo. Além disso, é um quasegrupo simétrico, pois $(Z_n, +)$ é um grupo abeliano. Esse grupo não é idempotente, contudo modificaremos ele para que seja. Note que n é ímpar e, os elementos na diagonal principal da tábua de $(Z_n, +)$ é (nessa ordem)

$$(\bar{x} + \bar{x} : \bar{x} \in Z_n) = (\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \dots, \overline{n-1}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \dots, \overline{n-2})$$

Isto é uma permutação de Z_n . Portanto, a tábua de $(Z_n, +)$ tem todos os elementos de Z_n na sua diagonal principal, mas não na ordem correta. Contudo, podemos permutar os elementos (isto é, renomeá-los) para que na diagonal principal apareçam os elementos $(\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n})$ (nessa ordem). Portanto, definimos uma permutação π de Z_n da seguinte forma

$$\pi(\bar{0}) = \bar{0}, \pi(\bar{2}) = \bar{1}, \dots, \pi(\overline{n-1}) = \frac{\overline{n-1}}{2}, \pi(\bar{1}) = \frac{\overline{n+1}}{2}, \dots, \pi(\overline{n-2}) = \overline{n-2}$$

Essa permutação, pode ser descrita de modo mais simples pela fórmula $\pi(\acute{x}) = \bar{2}^{-1} \acute{x}$. Desse modo, difinimos uma operação binária sobre Z_n dada por:

$$\bar{x} \circ \bar{y} = \bar{2}^{-1} (\bar{x} + \bar{y})$$

É fácil ver que $(\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}, \circ)$ é um quasegrupo idempotente e simétrico.

Observando o Lema 2, utilizaremos o fato de que ao permutarmos os símbolos de um quasegrupo simétrico, o resultado ainda é um quasegrupo e a propriedade de simetria é mantida.

Usaremos disso para transformar quadrados latinos simétricos em quadrados latinos simétricos e idempotentes. Para a ideia ficar clara, vejamos um exemplo.

Exemplo 5. Suponhamos que $n = 3$. A operação de adição usual em Z_3 é definida como usual $\hat{x} + \hat{y} = \overline{x + y}$. Note que ela define um quaserupo simétrico sobre o conjunto $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. O quadrado latino correspondente é o seguinte:

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

Observe que a tábua do quaserupo $(Z_3, +)$ fornece um quadrado latino simétrico, porém não idempotente. Para torná-lo idempotente vamos usar o fato de que se permutarmos os símbolos de um quase grupo simétrico, o resultado também é um quaserupo simétrico. Assim vamos permutar os elementos $\bar{1}$ e $\bar{2}$, ficando então com o seguinte quadrado latino:

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}$$

Portanto, agora temos um quaserupo simétrico e idempotente.

Então, por meio dos Lemas 1 e 2, é possível estabelecer o seguinte teorema.

Teorema 2. Existe um quaserupo simétrico e idempotente de ordem n se, e somente se, n é ímpar.

4 ORTOGONALIDADE ENTRE QUADRADOS LATINOS

Nesta seção, nos empenharemos em estudar a ortogonalidade entre quadrados latinos, um conceito importante dentro da teoria estudada que será primordial para comentarmos sobre o problema dos 36 oficiais mencionado na introdução e proposto por Leonhard Euler.

Definição 5. Um par de quadrados latinos, $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ de mesma ordem, digamos n , são ditos ortogonais se para cada par (k, l) em $\{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ existem valores únicos de i e j tais que $a_{ij} = k$ e $b_{ij} = l$.

Formularemos outra maneira de ver o conceito acima. Para isso, precisamos definir primeiro o conceito de concatenação entre matrizes.

Definição 6. Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ dois quadrados latinos de mesma ordem n e com entradas em um conjunto X . A concatenação de A por B é a matriz $A * B = (c_{ij})$ de ordem n e com entradas em X^2 definida por: $c_{ij} = (a_{ij}, b_{ij})$ para todos $1 \leq i, j \leq n$.

Podemos utilizar o conceito de concatenação de quadrados latinos para caracterizar os quadrados latinos ortogonais.

Proposição 2. Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ dois quadrados latinos de mesma ordem n e com entradas em um conjunto X . Então, A e B são ortogonais se, e somente se, os n^2 pares de X^2 aparecerem uma única vez na concatenação $A * B$.

Demonstração. Ver Stinson (2004).

Informalmente, consideramos dois quadrados latinos ortogonais quando os sobrepomos e, nessa sobreposição, cada combinação de símbolos em pares ordenados ocorre exatamente uma vez (Evans, 2018). Em outras palavras, se tivermos dois quadrados latinos A e B , ambos da mesma ordem, a sobreposição significa que colocamos os quadrados um sobre o outro de modo que cada célula contenha dois símbolos, um de A e outro de B . Dessa forma, ao percorrer todas as combinações de células correspondentes de A e B , cada par ordenado de símbolos aparece apenas uma vez nessa sobreposição.

Para fixarmos a ideia de ortogonalidade entre quadrados latinos, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 6. Para $n = 2$ temos os seguintes quadrados latinos:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Utilizando a definição, vamos concatenar os quadrados latinos A_1 e A_2 :

$$A_1 * A_2 = \begin{pmatrix} (1,2) & (2,1) \\ (2,1) & (1,2) \end{pmatrix}$$

Note que $c_{11} = c_{22}$, o que contraria a Proposição 17 e, portanto A_1 e A_2 não são ortogonais.

Exemplo 7. Considere os quadrados latinos do Exemplo 1,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Observe que quando concatenamos ambos os quadros latinos, obtemos a seguinte matriz

$$A * B = \begin{pmatrix} (1,2) & (2,1) & (3,3) \\ (2,3) & (3,2) & (1,1) \\ (3,1) & (1,3) & (2,2) \end{pmatrix}$$

Nesse caso, cada quadrado latino é de ordem 3 e contém todos os elementos de $\{1,2,3\}^2$. Cada possível par de valores em posições diferentes aparece exatamente uma vez entre eles, o que implica na ortogonalidade entre eles.

Vamos explorar agora alguns métodos de construção para quadrados latinos ortogonais.

Teorema 3. Se $n > 1$ é um inteiro ímpar, então existem quadrados latinos ortogonais de ordem n .

Demonstração. Começamos definindo dois quadrados latinos de mesma ordem n com entradas em \mathbb{Z}_n , $L = (l_{ij})$ e $M = (m_{ij})$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} l_{ij} = \bar{i} + \bar{j} \\ m_{ij} = \bar{i} - \bar{j} \end{cases}$$

Vamos provar que L e M são ortogonais quando n é ímpar. Suponha que $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. Queremos mostrar que existe uma única linha i e uma única coluna j tal que $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ aparece na concatenação $L * M$ nessa linha e coluna, isto é, $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (l_{ij}, m_{ij})$. Em outras palavras, queremos mostrar que o sistema

$$\begin{cases} \bar{i} + \bar{j} = \bar{\alpha} \\ \bar{i} - \bar{j} = \bar{\beta} \end{cases}$$

admite uma única solução $(\bar{i}, \bar{j}) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. Isso equivale ao fato de $\bar{2}$ ter inverso multiplicativo em \mathbb{Z}_n , o que só é verdade no caso em que n é ímpar.

Exemplo 8. Vamos construir quadrados latinos ortogonais de de ordem 5 usando a construção dada na demonstração do Teorema 3. Considere as seguintes tábuas em \mathbb{Z}_5 .

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$		$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$					
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$					
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$		$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$		$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$
	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$					
	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$					

Então, a concatenação dos quadrados latinos induzidos por essas tábuas gera a matriz:

$$\begin{pmatrix} (\bar{0}, \bar{0}) & (\bar{1}, \bar{4}) & (\bar{2}, \bar{3}) & (\bar{3}, \bar{2}) & (\bar{4}, \bar{1}) \\ (\bar{1}, \bar{1}) & (\bar{2}, \bar{0}) & (\bar{3}, \bar{4}) & (\bar{4}, \bar{3}) & (\bar{0}, \bar{2}) \\ (\bar{2}, \bar{2}) & (\bar{3}, \bar{1}) & (\bar{4}, \bar{0}) & (\bar{0}, \bar{4}) & (\bar{1}, \bar{3}) \\ (\bar{3}, \bar{3}) & (\bar{4}, \bar{2}) & (\bar{0}, \bar{1}) & (\bar{1}, \bar{0}) & (\bar{2}, \bar{4}) \\ (\bar{4}, \bar{4}) & (\bar{0}, \bar{3}) & (\bar{1}, \bar{2}) & (\bar{2}, \bar{1}) & (\bar{3}, \bar{0}) \end{pmatrix}$$

Desse modo, os quadrados latinos

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

são ortogonais.

Então, pelo Teorema 3, é possível afirmar que existem infinitos pares de quadrados latinos ortogonais desde que sejam de ordem ímpar. Porém, para resolver o desafio proposto por Euler, precisaríamos encontrar dois quadrados latinos de ordem 6, algo que não temos certeza ainda se é possível.

Euler, como já citado na introdução, propôs um problema que envolve 36 oficiais, sendo eles de 6 diferentes patentes e 6 diferentes regimentos. Os oficiais são organizados em um quadrado de ordem 6 (uma grade de 6 por 6). O problema consiste em determinar se é possível posicionar exatamente um oficial de cada patente e de cada regimento em posições diferentes do quadrado, de modo que não haja repetições em nenhuma linha ou coluna. Em outras palavras, convertendo isso à linguagem matemática, queremos achar um par de quadrados latinos ortogonais de ordem 6.

Euler, em suas tentativas de estudo acreditava que esse problema proposto por ele não tinha solução e até conjecturou que não existiam quadrados latinos ortogonais de ordem maior que 2, algo que foi refutado após sua morte apenas na década de 1950. Porém, Euler não estava errado em relação aos quadrados latinos de ordem 6. O matemático Tarry conseguiu provar, por meio de um método exaustivo, que não existe um par de quadrados latinos mutuamente ortogonais de ordem 6. Isso significa que não há uma organização dos 36 oficiais (cada um de uma das 6 diferentes patentes e 6 diferentes regimentos) em um quadrado de ordem 6 que satisfaça as condições necessárias para ser considerado um par de quadrados latinos ortogonais, fazendo o problema sem solução.

O termo "método exaustivo" indica que Tarry examinou todas as possíveis combinações e arranjos dos 36 oficiais em um quadrado de ordem 6 para verificar se atendiam às condições requeridas para serem considerados quadrados latinos ortogonais (Alegri, 2006). Após examinar todas as possibilidades, Tarry concluiu que nenhuma delas satisfazia os critérios, confirmando assim que não há solução para o problema dos 36 oficiais nesse contexto específico. Existe um teorema que explica melhor isso, porém iremos apenas citá-lo, pois sua prova necessita de um longo espaço.

Teorema 4. Para todo natural n , exceto 2 e 6, existe um par de quadrados latinos ortogonais ordem n .

Portanto, concluímos o problema dos 36 oficiais com uma resposta de que não existem quadrados latinos ortogonais de ordem 6, fato que foi considerado, de certo modo, até “incrível” pelos matemáticos, dado que existem quase para todos os números naturais.

5 CONSTRUÇÃO DE NOVOS QUADRADOS LATINOS A PARTIR DE QUADRADOS LATINOS EXISTENTES

Neste capítulo, usaremos as referências Keedwell; Dénes (1974) e Stinson (2004). Na construção de quadrados latinos, o conceito de produto de Kronecker é uma ferramenta útil para combinar dois quadrados latinos existentes e criar um novo quadrado latino. Vamos explorar como isso funciona primeiramente em um exemplo.

Exemplo 23. Sejam $X = \{1,2\}$ e $Y = \{1,2,3\}$. Considere os seguintes quadrados latinos sobre X e Y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Então, o produto de Kronecker de A e B é dado por

$$\begin{pmatrix} (1,B) & (2,B) \\ (2,B) & (1,B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (1,3) & (1,1) & (1,2) & (2,3) & (2,1) & (2,2) \\ (1,2) & (1,3) & (1,1) & (2,2) & (2,3) & (2,1) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,3) & (2,1) & (2,2) & (1,3) & (1,1) & (1,2) \\ (2,2) & (2,3) & (2,1) & (1,2) & (1,3) & (1,1) \end{pmatrix}$$

A partir de agora, por conveniência, a entrada a_{ij} de uma matriz $A = (a_{ij})$ poderá ser denotada por $A(i, j)$.

Definição 7. Suponha que $L = (l_{ij})$ e $M = (m_{ij})$ são quadrados latinos de ordem m e n definidos sobre conjunto de símbolos X e Y respectivamente. O produto direto ou produto de Kronecker de L e M , denotado por $L \times M$, é uma matriz quadrada de ordem mn definida como segue:

$$(L \times M)((i_1, i_2), (j_1, j_2)) = (L(i_1, j_1), M(i_2, j_2)),$$

para quaisquer $1 \leq i_1, j_1 \leq m$ e $1 \leq i_2, j_2 \leq n$.

No contexto dos quasegrupos, podemos escrever a definição da seguinte maneira:

Definição 8. Sejam (Q_1, o_1) e (Q_2, o_2) dois quasegrupos. O produto direto ou produto de Kronecker de Q_1 e Q_2 , denotado por $Q_1 \times Q_2$ é definido da seguinte forma:

$$(x, y) \times (z, w) = (x \circ_1 z, y \circ_2 w)$$

para todos $x, y \in Q_1$ e $z, w \in Q_2$.

Como esperado o produto direto do Exemplo 9 induz um quadrado latino de ordem 6. Para estabelecer a ordem de um quadrado latino quando usamos as definições anteriores, temos a seguinte proposição:

Proposição 3. Se L e M são quadrados latinos de ordem m e n definidos sobre os conjuntos de símbolos X e Y respectivamente, então o produto direto $L \times M$ é um quadrado latino de ordem $m \cdot n$ sobre o conjunto de símbolos $X \times Y$.

Demonstração. Considere uma linha de $L \times M$, digamos (i_1, i_2) . Sejam $x \in X$ e $y \in Y$. Mostraremos como encontrar o símbolo (x, y) na linha (i_1, i_2) de $L \times M$. Visto que L é um quadrado latino, existe uma única coluna j_1 tal que $L(i_1, j_1) = x$. Também, como M é um quadrado latino, existe uma única coluna j_2 tal que $M(i_2, j_2) = y$. Então,

$$(L \times M)((i_1, i_2), (j_1, j_2)) = (L(i_1, j_1), M(i_2, j_2)) = (x, y)$$

Das unicidades, segue que na linha (i_1, i_2) de $L \times M$ o par (x, y) aparece uma única vez. Similarmente, prova-se que toda coluna de $L \times M$ contém todo símbolo de $X \times Y$ uma única vez e, portanto, $L \times M$ é um quadrado latino.

Tal resultado levanta a esperança de construir quadrados latinos ortogonais de ordens maiores a partir de quadrados latinos ortogonais de ordens menores. Fato concretizado no resultado abaixo.

Teorema 5. Se existem quadrados latinos ortogonais de ordens m e n , então existem quadrados latinos ortogonais de ordem $m \cdot n$.

Demonstração. Suponhamos que L_1 e L_2 sejam dois quadrados latinos ortogonais de ordem m sobre um conjunto X e que M_1 e M_2 sejam dois quadrados latinos ortogonais de ordem n sobre um conjunto Y . Vamos mostrar que $L_1 \times M_1$ e $L_2 \times M_2$ são quadrados latinos ortogonais de ordens $m \cdot n$. Da Proposição 26 segue que $L_1 \times M_1$ e $L_2 \times M_2$ são quadrados latinos sobre $X \times Y$. Assim, é suficiente mostrarmos que $L_1 \times M_1$ e $L_2 \times M_2$ são ortogonais. Considere um par ordenado $((x, y), (z, w)) \in$. Como L_1 e L_2 são ortogonais, existe uma única linha i_1 e uma única coluna j_1 tal que

$$L_1(i_1, j_1) = x \text{ e } L_2(i_1, j_1) = z$$

Como M_1 e M_2 são ortogonais, existe uma única linha i_2 e uma única coluna j_2 tal que

$$M_1(i_2, j_2) = y \text{ e } M_2(i_2, j_2) = w$$

Portanto, na concatenação $(L_1 \times M_1) * (L_2 \times M_2)$ existe uma única linha (i_1, i_2) e uma única coluna (j_1, j_2) tal que

$$(L_1 \times M_1)((i_1, i_2), (j_1, j_2)) = (x, y) \text{ e } (L_2 \times M_2)((i_1, i_2), (j_1, j_2)) = (z, w)$$

Desse modo, $L_1 \times M_1$ e $L_2 \times M_2$ são quadrados latinos ortogonais sobre $X \times Y$. Como $|X \times Y| = m \cdot n$, obtemos o desejado.

Teorema 6. Seja $n \not\equiv 2 \pmod{4}$, então existem quadrados latinos ortogonais de ordem n .

Demonstração. Dividiremos a demonstração em alguns casos.

Caso 1: O caso em que n é ímpar já foi provado no Teorema 3.

Caso 2: Suponhamos que n é uma potência de 2, digamos $n = 2^k$, em que $k \geq 2$. O resultado é válido para $k = 2$ e $k = 3$, basta considerar os seguintes pares de quadrados latinos

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para $k \geq 4$, construímos quadrados latinos ortogonais de ordem 2^k , usando o Princípio da indução finita sobre k , aplicando o Teorema 5, com $m = 2^2$ e $n = 2^{k-2}$.

Caso 3: Finalmente, suponhamos que n é par e n não é potência de 2. (Por hipótese, ainda temos que $n \not\equiv 2 \pmod{4}$). Nesse caso, podemos escrever $n = 2^k \cdot l$, em que $k \geq 2$ e $l \geq 1$ é ímpar. Note que já mostramos como construir quadrados latinos ortogonais de ordens 2^k e l nos Casos 1 e 2. Aplicamos o Teorema 5 com $m = 2^k$ e $n = l$ e o resultado segue.

6 QUADRADOS LATINOS MUTUAMENTE ORTOGONAIS

Começamos esta seção com uma definição de quadrados latinos mutuamente ortogonais:

Definição 9. Uma família $\{L_1, L_2, \dots, L_s\}$ de quadrados latinos de ordem n é chamada um conjunto de quadrados latinos mutuamente ortogonais, denotado por sMOLS (n), se os s quadrados latinos L_1, L_2, \dots, L_s forem dois a dois ortogonais.

A sigla MOLS simplifica a expressão em inglês “*Mutually Orthogonal Latin Squares*”.

Exemplo 10. Os quadrados latinos a seguir formam uma família de três quadrados latinos mutuamente ortogonais.

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com a Definição 9, naturalmente podemos considerar o seguinte problema: “Qual a cardinalidade máxima de um conjunto de quadrados latinos mutuamente ortogonais de ordem n ?”

Definição 10. Para $n \geq 2$, o número $N(n)$ denota a cardinalidade máxima do conjunto de quadrados latinos mutuamente ortogonais de ordem n . Por convenção, $N(1) = \infty$.

Lembremos que o Teorema 5 nos diz que se L_1 e L_2 são dois quadrados latinos ortogonais de ordem m e se M_1 e M_2 são dois quadrados latinos ortogonais de ordem n , então $L_1 \times M_1$ e $L_2 \times M_2$ são dois quadrados latinos ortogonais de ordens mn . Como consequência do Teorema 5, obtemos as seguintes consequências.

Corolário 1. Se $\{L_1, L_2, \dots, L_t\}$ é um t MOLS(m) e $\{M_1, M_2, \dots, M_t\}$ é um t MOLS(n), então a família de produtos diretos $\{L_1 \times M_1, L_2 \times M_2, \dots, L_t \times M_t\}$ é um t MOLS(mn).

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 5.

Corolário 2. Para quaisquer inteiros $m \geq 1$ e $n \geq 1$,

$$N(mn) \geq \min\{N(m), N(n)\}$$

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 27.

Um simples argumento mostra que $N(n) \leq n - 1$. Vejamos.

Teorema 7. Se $n \geq 2$, então $N(n) \leq n - 1$, isto é, não existe um n MOLS(n) se $n \geq 2$.

Demonstração. Suponhamos que L_1, L_2, \dots, L_n são quadrados latinos mutuamente ortogonais de ordem $n \geq 2$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que L_1, L_2, \dots, L_n são todos definidos no conjunto de símbolos $\{1, 2, \dots, n\}$. Além disso, podemos assumir que a primeira linha desses quadrados latinos é

$$(1 \quad 2 \quad \dots \quad n)$$

(Isto é justificável, observe que em cada L_i podemos fazer uma reenumeração dos símbolos para que a primeira linha fique como acima. Essa reenumeração não afeta a

ortogonalidade dos quadrados latinos.) Agora consideremos os s valores $L_1(2,1), L_2(2,1), \dots, L_s(2,1)$ (aqui é onde requeremos que $n \geq 2$).

Afirmção 1: $L_1(2,1), L_2(2,1), \dots, L_s(2,1)$ são dois a dois distintos. Com efeito, suponhamos por absurdo que $L_i(2,1) = L_j(2,1) = x$. Então, o par (x, x) aparece duas vezes na concatenação $L_i * L_j$, a saber, nas posições $(1, x)$ e $(2, 1)$, o que é um absurdo, pois contradiz a ortogonalidade de L_i e L_j .

Afirmção 2: $L_1(2,1) \neq 1, L_2(2,1) \neq 1, \dots, L_s(2,1) \neq 1$. De fato, note que $L_1(1,1) = 1, L_2(1,1) = 1, \dots, L_s(1,1) = 1$ e que L_1, L_2, \dots, L_s são quadrados latinos.

Combinando as duas afirmações, vemos que $L_1(2,1), L_2(2,1), \dots, L_s(2,1)$ são s elementos distintos no conjunto $\{2, 3, \dots, n\}$. Portanto, $s \leq n - 1$ e, conseqüentemente, $N(n) \leq n - 1$.

Proposição 4 (Construção de MOLS a partir de corpos finitos). Seja p um número primo. Para cada $\bar{k} \neq \bar{0}$, definimos a seguinte operação binária $\circ_{\bar{k}}$ sobre \mathbb{Z}_p :

$$\bar{x} \circ_{\bar{k}} \bar{y} = \bar{x} \cdot \bar{k} + \bar{y}$$

Então, $(\mathbb{Z}_p, \circ_{\bar{k}})$ é um quasegrupo.

Demonstração. Inicialmente provamos que cada linha x gera uma permutação de \mathbb{Z}_p . Suponhamos que

$$\bar{x} \circ_{\bar{k}} \bar{y} = \bar{x} \circ_{\bar{k}} \bar{z}$$

Então,

$$\bar{x} \circ_{\bar{k}} \bar{y} = \bar{x} \circ_{\bar{k}} \bar{z} \Leftrightarrow \bar{x} \cdot \bar{k} + \bar{y} = \bar{x} \cdot \bar{k} + \bar{z} \Leftrightarrow \bar{y} = \bar{z}.$$

Agora, provaremos que cada coluna y também induz uma permutação de \mathbb{Z}_p . Suponhamos que

$$\bar{x} \circ_{\bar{k}} \bar{y} = \bar{z} \circ_{\bar{k}} \bar{y}$$

Então,

$$\bar{x} \circ_{\bar{k}} \bar{y} = \bar{z} \circ_{\bar{k}} \bar{y} \Leftrightarrow \bar{x} \cdot \bar{k} + \bar{y} = \bar{z} \cdot \bar{k} + \bar{y} \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{z}.$$

Note que a última equivalência é válida pois $k \neq 0$ e \mathbb{Z}_p é um corpo. Portanto, $(\mathbb{Z}_p, \circ_{\bar{k}})$ é um quasegrupo.

Exemplo 11. Exibiremos um quadrado latino de ordem 3, utilizando a Proposição 4. Primeiramente vamos construir as tábuas aditiva e multiplicativa de \mathbb{Z}_3 .

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$		\cdot	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$				
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$		$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
			$\bar{2}$				
			$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$		

Pelas tábuas de adição e multiplicação, vamos aplicar as operações $\circ_{\bar{1}}$ e $\circ_{\bar{2}}$ definidas na Proposição 4 para construir dois quadrados latinos em Z_3 .

$\circ_{\bar{1}}$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

e

$\circ_{\bar{2}}$	0	1	2
0	0	1	2
1	2	0	1
2	1	2	0

Por inspeção, podemos ver que esses dois quadrados latinos são ortogonais. Isso não é por acaso, como podemos ver no próximo teorema.

Teorema 8. Seja p um número primo. Então $(Z_p, \circ_{\bar{1}}), (Z_p, \circ_{\bar{2}}), \dots, (Z_p, \circ_{\overline{p-1}})$ formam um conjunto de quadrados latinos mutuamente ortogonais. Como consequência, $N(p) = p - 1$ para todo número primo p .

Demonstração. Denotemos o quadrado latino associado com o quasegrupo $(Z_p, \circ_{\bar{k}})$ por $L_{\bar{k}}$ para cada $\bar{k} \in \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$. Precisamos verificar que os quadrados latinos $L_{\bar{k}}$ e $L_{\bar{l}}$ são ortogonais para todos $\bar{k}, \bar{l} \in \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$. Para isso, suponhamos que na concatenação $L_{\bar{k}} * L_{\bar{l}}$ há duas entradas (\bar{i}_1, \bar{j}_1) e (\bar{i}_2, \bar{j}_2) que contém o mesmo símbolo (\bar{a}, \bar{b}) , isto é,

$$(L_{\bar{k}} * L_{\bar{l}})(\bar{i}_1, \bar{j}_1) = (\bar{a}, \bar{b}) = (L_{\bar{k}} * L_{\bar{l}})(\bar{i}_2, \bar{j}_2)$$

Desse modo,

$$L_{\bar{k}}(\bar{i}_1, \bar{j}_1) = \bar{a}, L_{\bar{l}}(\bar{i}_1, \bar{j}_1) = \bar{b}, L_{\bar{k}}(\bar{i}_2, \bar{j}_2) = \bar{a} \text{ e } L_{\bar{l}}(\bar{i}_2, \bar{j}_2) = \bar{b}$$

Das definições de $(\mathbb{Z}_p, \circ_{\bar{k}})$ e de $(\mathbb{Z}_p, \circ_{\bar{l}})$ vem que:

$$\begin{aligned}\bar{i}_1 \cdot \bar{k} + \bar{j}_1 &= \bar{a} = \bar{i}_2 \cdot \bar{k} + \bar{j}_2 \\ \bar{i}_1 \cdot \bar{l} + \bar{j}_1 &= \bar{b} = \bar{i}_2 \cdot \bar{l} + \bar{j}_2\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\bar{j}_2 &= \bar{i}_1 \cdot \bar{k} + \bar{j}_1 - \bar{i}_2 \cdot \bar{k} \\ \bar{j}_2 &= \bar{i}_1 \cdot \bar{l} + \bar{j}_1 - \bar{i}_2 \cdot \bar{l}\end{aligned}$$

e equivalentemente,

$$(\bar{i}_1 - \bar{i}_2) \cdot \bar{k} = (\bar{i}_1 - \bar{i}_2) \cdot \bar{l}$$

A condição $\bar{k} \neq \bar{l}$ implica que $\bar{i}_1 - \bar{i}_2 = \bar{0}$, ou seja, $\bar{i}_1 = \bar{i}_2$. Retornando as equações acima, obtemos $\bar{j}_1 = \bar{j}_2$.

Portanto, na concatenação $L_{\bar{k}} * L_{\bar{l}}$ não há repetição de elementos e, assim, $L_{\bar{k}}$ e $L_{\bar{l}}$ são ortogonais para todos $\bar{k}, \bar{l} \in \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$. Desse modo, os quadrados latinos $(\mathbb{Z}_p, \circ_{\bar{1}}), (\mathbb{Z}_p, \circ_{\bar{2}}), \dots, (\mathbb{Z}_p, \circ_{\overline{p-1}})$ são mutuamente ortogonais, isto é, eles formam um $(p-1)$ *MOLS*(p).

Combinando o Corolário 2 e o Teorema 8 obtemos como consequência:

Corolário 3. Seja $n \geq 1$ tal que $n = p_1 p_2 \cdots p_s$. Então,

$$N(n) \geq \min\{p_i - 1 : 1 \leq i \leq s\}$$

Demonstração. Pelo Teorema 8, $N(p_i) = p_i - 1$ para todo $1 \leq i \leq s$. Aplicando sucessivamente o Corolário 2 obtemos o desejado.

7 INTEGRAÇÃO DA TEORIA DOS QUADRADOS LATINOS NO JOGO SUDOKU

O jogo de Sudoku, apreciado por entusiastas de quebra-cabeças em todo o mundo, oferece um fascinante ponto de conexão com a teoria dos quadrados latinos. Ao explorarmos os fundamentos matemáticos subjacentes ao Sudoku, torna-se evidente que suas regras e estrutura compartilham semelhanças intrínsecas com os quadrados latinos, proporcionando uma interessante interseção entre a diversão lúdica e a teoria matemática.

O Sudoku, composto por uma grade 9×9 dividida em subgrades 3×3 , desafia os jogadores a preencherem cada célula da grade com dígitos de 1 a 9, de modo que cada linha, cada coluna e cada subgrade contenham todos os números de 1 a 9 sem repetições. Este desafio aparentemente simples é uma estrutura matemática que pode ser compreendida através dos quadrados latinos.

7.1 Similaridades Estruturais

Os quadrados latinos são conhecidos por sua habilidade em distribuir elementos de um conjunto de maneira que cada elemento apareça exatamente uma vez em cada linha e em cada coluna. Analogamente, no Sudoku, cada número de 1 a 9 deve ser colocado de tal forma que não se repita em nenhuma linha, coluna ou subgrade. Essa correspondência estrutural destaca a relação conceitual entre os quadrados latinos e o desafio de preencher corretamente um Sudoku.

7.2 Quadrados Latinos e as Regras do Sudoku

A teoria dos quadrados latinos oferece uma base matemática para entendermos por que as regras do Sudoku são construídas da maneira que são. A busca por soluções únicas e a ausência de repetições em linhas, colunas e subgrades refletem diretamente as propriedades dos quadrados latinos. Isso adiciona uma camada de profundidade à apreciação do Sudoku, transformando o jogo em mais do que apenas um passatempo, mas também em uma expressão tangível dos princípios matemáticos subjacentes. A Figura 2 abaixo, representa um exemplo de um Sudoku.

Figura 1 - Sudoku - Jogo de lógica numérica que está intrinsecamente ligado aos quadrados latinos

		1						
		2		3				4
			5			6		7
5			1	4				
	7						2	
				7	8			9
8		7			9			
4				6		3		

Fonte: Brasil Escola, 2023.

7.3 Implicações para Pesquisa e Ensino

Ao considerarmos a interseção entre a teoria dos quadrados latinos e o Sudoku, surge uma área fértil para pesquisa e exploração didática. Investigar estratégias eficazes para a resolução do Sudoku à luz dos princípios dos quadrados latinos pode oferecer insights valiosos não apenas para os entusiastas do jogo, mas também para educadores que buscam métodos inovadores para ensinar conceitos matemáticos abstratos (Godinho, 2008).

A incorporação da teoria dos quadrados latinos no contexto do Sudoku não apenas enriquece nossa compreensão do jogo, mas também destaca a presença ubíqua dessas estruturas matemáticas em situações cotidianas aparentemente não relacionadas. Esta exploração, portanto, não apenas acrescenta profundidade a esse trabalho, mas também lança luz sobre as conexões fascinantes que podem ser reveladas quando a teoria matemática encontra aplicações práticas em jogos tão populares quanto o Sudoku.

8 CONCLUSÃO

Ao concluir esta pesquisa sobre quadrados latinos, fica evidente a importância de explorar esse conceito dentro da matemática pura, pois o mesmo não é estudado no ensino médio e dificilmente é abordado nas universidades. Este tema, muitas vezes esquecido, revela-se como uma potencial solução para diversos problemas, não apenas no âmbito da matemática pura, mas também na matemática aplicada a contextos reais – embora não tenhamos estudado ao longo deste trabalho suas aplicações – e até mesmo em jogos, como exemplificado pelo Sudoku mencionado ao longo do texto.

Uma conclusão crucial deste estudo reside na versatilidade dessas estruturas. Apesar de ser um campo aparentemente restrito, há amplas possibilidades de aprofundamento e aplicações em outras áreas como agricultura e informática. A teoria dos quadrados latinos pode ser usada para projetar experimentos agrícolas, nos quais diferentes tratamentos (por exemplo, tipos de fertilizantes, métodos de irrigação, variedades de plantas) são aplicados a diferentes parcelas de terra. Na informática, a teoria dos quadrados latinos pode ser aplicada ao teste de software. Por exemplo, em testes de desempenho de aplicativos, pode-se usar quadrados latinos para garantir que diferentes configurações de hardware ou sistemas operacionais sejam testadas em diferentes momentos, evitando assim a interferência de variáveis não controladas.

A análise dos quasegrupos, abordados como uma perspectiva algébrica para compreender os quadrados latinos, revelou a riqueza e complexidade dessas estruturas algébricas, enriquecendo nosso entendimento sobre suas propriedades e teoremas e mostrando uma maneira diferente de se observar um quadrado latino.

A investigação sobre quadrados latinos ortogonais destacou a importância de explorar as propriedades combinatórias dessas estruturas, especialmente no que se refere à sua ortogonalidade. Aprofundando-se nesse conceito, foi possível resolver o problema dos 36 oficiais proposto por Leonhard Euler, representando uma conquista significativa deste trabalho, pois foi um dos motivadores para a escolha desse tema.

Entretanto, esta pesquisa não marca o fim da jornada, mas sim um ponto de partida para investigações futuras. A dinâmica e constante evolução desses conceitos sugerem a necessidade contínua de exploração e aprofundamento. Pesquisas subsequentes podem direcionar-se a extensões desses conceitos, à sua aplicação prática em diversas disciplinas e à busca por novas propriedades e relações ainda não totalmente exploradas. Em última análise, este trabalho visa contribuir para um diálogo crítico sobre as propriedades subjacentes aos quadrados latinos. Este conceito, muitas vezes relegado a segundo plano no ensino básico e superior, merece uma atenção mais destacada. Espera-se que este estudo inspire uma maior apreciação e compreensão da relevância dessas estruturas na matemática e em suas aplicações práticas.

REFERÊNCIAS

ALEGRI, M. **Quadrados latinos e aplicações**. 2006. 86 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Departamento de Matemática Aplicada, 2006.

EVANS, A. B. **Orthogonal Latin squares based in groups**. Switzerland: Springer, 2018. (Developments in Mathematics, v. 57).

GODINHO, C. S. G. **Alguma da matemática do Sudoku**. 2008. 96 f. Dissertação (Mestrado em Matemática e Aplicações) - Universidade de Aveiro, Departamento de Matemática, Aveiro, 2008.

KEEDWELL, A. D.; DÉNES, J. **Latin squares and their applications**. 2. ed. New York; London: Academic Press, 1974.

STINSON, D. R. **Combinatorial designs: constructions and analysis**. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 2004.

CAPÍTULO VIII

UM ESTUDO DE OPERADORES DIAGONALIZÁVEIS E UMA INTRODUÇÃO À FORMA CANÔNICA DE JORDAN

DOI: 10.51859/ampla.epm963.1125-8

Said Daruj Padre Filho
saidarujpadrefilho@gmail.com

Anderson Novaes Martinhão
andersonmartinhao@ufgd.edu.br

Marcos Vinicius de Oliveira Peres
mvoperes@uem.br

Talisson Fernando Leiria
talisson_leiria@hotmail.com

RESUMO

Operador linear é um dos conceitos fundamentais quando estamos estudando Álgebra Linear, seu uso é muito abrangente e engloba várias áreas da ciência, como por exemplo na física onde são amplamente usados para modelar processos dinâmicos. Também são essenciais em teorias como mecânica quântica, além de serem muito úteis para resolverem equações diferenciais ordinárias. Mediante a isso, este trabalho propõe realizar uma análise sobre esses operadores, destacando alguns pontos importantes como sua representação matricial em relação a uma base, bem como dar ênfase aos casos em que conseguimos encontrar uma matriz diagonal que represente esses operadores – esse processo recebe o nome de diagonalização. Entretanto, em muitos casos nos deparamos com operadores que não podem ser diagonalizados, conseqüentemente não conseguimos representá-los por meio de uma matriz diagonal. Por conta desse impasse somos incentivados a buscar um método que seja capaz de contornar essa situação, método esse chamado de Forma Canônica de Jordan, que abordaremos neste trabalho.

Palavras-chave: Autovalores. Autovetores. Operadores Diagonalizáveis.

1 INTRODUÇÃO

A Álgebra Linear é uma área de conhecimento da matemática muito ampla e que desempenha papel essencial na compreensão e estudo de vários conceitos importantes como

espaços vetoriais, operadores lineares, autovalores e autovetores, diagonalização de operadores lineares e a construção da Forma Canônica de Jordan. Esse último conceito trata-se de um dos marcos mais significativos no campo da álgebra e leva o nome do matemático francês Marie Ennemond Camille Jordan.

Nascido em Lyon, França, em 5 de janeiro de 1838, Camille Jordan demonstrou precocemente um talento extraordinário para a matemática. Sua trajetória acadêmica foi marcada por conquistas notáveis, culminando em sua posição como professor na renomada École Polytechnique, onde sua genialidade floresceu e influenciou gerações futuras de matemáticos.

Jordan tornou-se amplamente reconhecido por seus avanços em diversas áreas, inclusive na teoria dos números, na topologia e na álgebra abstrata. No entanto, é na álgebra linear que seu nome ressoa de maneira singular, graças à Forma Canônica de Jordan, uma ferramenta matemática poderosa que transcendeu fronteiras disciplinares.

Para este artigo, abordaremos o fato de que, se trabalharmos com operadores diagonalizáveis será mais conveniente para efetuarmos cálculos, isso pois vamos explorar o resultado de que um operador linear T pode ser representado por uma matriz em relação a uma base B que é denotada por $[T]_B$. E no caso particular de operadores diagonalizáveis, essa matriz será diagonal, o que facilitará muito o cálculo das coordenadas de um vetor aplicado nesse operador por exemplo, ou em situações mais complexas, são úteis para resolvermos equações diferenciais ordinárias.

Dessa forma somos incentivados a buscar maneiras de como diagonalizar um operador, entretanto vamos ver que nem todos os operadores lineares são diagonalizáveis e por consequência disso vamos estudar nesse trabalho como se dá a construção da Forma Canônica de Jordan. Esse método permite simplificar um operador, obtendo uma matriz semelhante a uma matriz diagonal, ou seja, possui muitas entradas composta de números zeros, o que é bastante útil, pois otimiza cálculos, principalmente em aplicações matemáticas.

2 OPERADORES DIAGONALIZÁVEIS

Durante o texto, a menos que mencionemos o contrário, consideraremos espaços vetoriais sobre um corpo arbitrário K .

Seja U um espaço vetorial. Uma função $T: U \rightarrow U$ recebe o nome de operador linear, se

$$T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2),$$

para todos $u_1, u_2 \in U$ e $\lambda \in K$. O conjunto $\{u \in U: T(u) = 0\}$ é chamado de núcleo de T e é denotado por $Nuc(T)$. Não é difícil ver que $Nuc(T)$ é um subespaço vetorial de U .

2.1 Autovalores e autovetores

Sejam U um espaço vetorial com dimensão finita $n \geq 1$ e $T: U \rightarrow U$ um operador linear. Associaremos T a uma matriz $n \times n$ sobre K . Sejam $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de U e $u \in U$. Digamos que $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ em que $\alpha_j \in K$ para todo $1 \leq j \leq n$. Em particular, como $T(u)$ é um vetor de U , então também pode ser escrito como combinação linear na base B , digamos

$$\begin{cases} T(u_1) & a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{n1}u_n \\ \vdots & \vdots \\ T(u_n) & a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{nn}u_n \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} T(u) &= \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_n T(u_n) = \\ &= \alpha_1(a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{n1}u_n) + \dots + \alpha_n(a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{nn}u_n) = \\ &= (\alpha_1 a_{11} + \dots + \alpha_n a_{1n})u_1 + \dots + (\alpha_1 a_{n1} + \dots + \alpha_n a_{nn})u_n. \end{aligned}$$

Denotando as coordenadas de $T(u)$ em relação a base B por $\beta_i = \alpha_1 a_{i1} + \dots + \alpha_n a_{in}$ para todo $1 \leq i \leq n$, do que foi discutido acima temos que as coordenadas de $T(u)$ em relação a base B satisfazem

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

Usualmente, representamos as coordenadas de um vetor arbitrário v com relação a uma base arbitrária \mathcal{C} como uma matriz coluna denotada por $[v]_{\mathcal{C}}$. Assim, a Equação 1 será denotada por $[T(u)]_B = [T]_B \cdot [u]_B$ em que

$$[T(u)]_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, [T]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ e } [u]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

A matriz $[T]_B$ é a matriz de T com relação à base B . Se conhecemos a matriz de um operador fica "mais fácil" de efetuar os seus cálculos, isso pois como acabamos de ver, basta multiplicar a matriz do operador linear T pelo vetor coluna em questão.

Exemplo 1. Considere o operador $T: R^3 \rightarrow R^3$ cuja matriz com relação a base canônica seja

Vamos calcular agora $T(2,5,1)$.

$$T(2,5,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Consideremos agora um operador linear $T: U \rightarrow U$ e $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de U tal que $T(u_i) = \lambda_i u_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Assim,

$$\begin{aligned} T(u_1) &= \lambda_1 u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_n \\ &\vdots \\ T(u_n) &= 0u_1 + 0u_2 + \cdots + \lambda_n u_n \end{aligned}$$

Nesse caso a matriz de T com relação a base B é uma matriz diagonal da forma

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Quando a matriz de um operador é diagonal fica ainda mais fácil obter propriedades do operador a partir dessa matriz.

Exemplo 2. Considere o operador linear $T: R^3 \rightarrow R^3$ definido pela seguinte matriz em relação a base canônica,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculando $T(1,2,-1)$, obtemos,

$$T(1,2,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 2 \\ 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz $[T]_B$ é diagonal possui várias entradas contendo o número zero, facilitando assim o cálculo de multiplicação entre a matriz do operador pelo vetor coluna. Isso nos motiva a definir os conceitos de autovalor e autovetor.

Definição 3. Seja $T: U \rightarrow U$ um operador linear.

a) Chamamos de autovalor de T um elemento $\lambda \in K$ tal que existe um vetor não nulo $u \in U$ de modo que $T(u) = \lambda u$.

b) Se λ é um autovalor de T , então todo vetor não nulo $u \in U$ tal que $T(u) = \lambda u$ é denominado autovetor de T associado a λ . Denotamos por $Aut_T(\lambda)$ o subespaço de U gerado por todos os autovetores associados a λ .

c) Seja $T: U \rightarrow U$ um operador linear e suponha que a dimensão de U é finita. Dizemos que o operador linear T é diagonalizável se existir uma base B de U tal que $[T]_B$ é diagonal. Isso equivale a dizer que B é uma base de autovetores de T .

Note que $T: U \rightarrow U$ ser um operador linear não injetor equivale a dizer que 0 é um autovalor de T . De fato, dizer que T não é injetor equivale a dizer que existe $w \in Nuc(T) \setminus \{0\}$ tal que $T(w) = 0$, ou ainda, $T(w) = 0w = 0$.

Vejamos agora que nem todo operador linear é diagonalizável.

Exemplo 3. Considere o operador linear

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto T(x, y) = (-y, x). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que T não possui autovalores. Com efeito, suponhamos por absurdo que T tenha autovalores, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(a, b) = \lambda(a, b)$, para algum $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Note que $T(a, b) = \lambda(a, b)$ é equivalente a $(-b, a) = \lambda(a, b)$, ou ainda

$$\begin{cases} -b = \lambda a \\ a = \lambda b \end{cases}$$

Note que $\lambda \neq 0$, pois caso contrário $a = b = 0$. Isolando a na primeira equação encontramos $a = \frac{-b}{\lambda}$. Substituindo na segunda equação encontramos a seguinte igualdade $\frac{-b}{\lambda} = \lambda b$ ou ainda $(\lambda^2 + 1)b = 0$. É evidente que a parcela $\lambda^2 + 1 \neq 0$, assim $b = 0$, e substituindo na primeira equação obtemos também que $a = 0$, o que é um absurdo.

2.2 Polinômio característico

Introduziremos agora uma caracterização dos autovalores de um operador linear. Seja $\lambda \in K$ um autovalor de $T: U \rightarrow U$, então existe um vetor $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$. Denotaremos também $I: U \rightarrow U$ como sendo o operador identidade. Assim, $T(v) = \lambda v = I(\lambda v) = \lambda I(v)$. Podemos colocar o vetor v em evidência, obtendo $(\lambda I - T)(v) = 0$.

Claramente o $Nuc(\lambda I - T) \neq \{0\}$. Por outro lado, seja $w \in Nuc(\lambda I - T)$ em que $w \neq 0$, então $(\lambda I - T)(w) = 0$, usando as propriedades de transformação obtemos $T(w) = \lambda w$.

Acabamos de provar o seguinte resultado.

Proposição 1. Um escalar λ é um autovalor de um operador linear T se, e somente se, $Nuc(\lambda I - T) \neq \{0\}$.

Proposição 2. Se um escalar λ é um autovalor de um operador linear $T: U \rightarrow U$, então $Aut_T(\lambda) = Nuc(\lambda I - T)$.

Demonstração. Seja $w \in Aut_T(\lambda)$. Então, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in K$ e u_1, \dots, u_t autovetores de T associados a λ tais que $w = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t$, logo

$$\begin{aligned} (\lambda I - T)(w) &= \lambda I(w) - T(w) = \lambda w - (\alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_t T(u_t)) = \\ &= \lambda w - (\alpha_1 \lambda u_1 + \dots + \alpha_t \lambda u_t) \\ &= \lambda w - \lambda w = 0. \end{aligned}$$

Assim $w \in Nuc(\lambda I - T)$, logo $Aut_T(\lambda) \subseteq Nuc(\lambda I - T)$. Por outro lado, seja $w \in Nuc(\lambda I - T)$, então $(\lambda I - T)(w) = 0$, donde $T(w) = \lambda w$, então $w \in Aut_T(\lambda)$. Desse modo mostramos que $Nuc(\lambda I - T) \subseteq Aut_T(\lambda)$.

Note que $Nuc(\lambda I - T) \neq \{0\}$ equivale a dizer que $\lambda I - T$ é um operador linear não injetor, logo ele não é invertível. Isso significa que a matriz $[\lambda I - T]_B$ também não é invertível, ou ainda, det , esse fato será usado para definirmos o polinômio característico.

Definição 2. Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita, $T: U \rightarrow U$ um operador linear e B uma base de U . O polinômio det é o polinômio característico de T , e será denotado por $p_T(x)$.

Segue do que foi discutido anteriormente, que as raízes do polinômio característico $p_T(x)$, quando existirem, são os autovalores de T .

Quando consideramos um operador linear $T: U \rightarrow U$ em que U é um C -espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$, como C é um corpo algebricamente fechado o polinômio característico de T sempre terá raízes em C . Em outras palavras, um operador linear $T: U \rightarrow U$, onde U é um C -espaço vetorial sempre terá autovalores. O polinômio característico nesse caso será dessa forma $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \cdots (x - \lambda_t)^{r_t}$.

Exemplo 4. Seja $T: C^2 \rightarrow C^2$ um operador linear dado por $T(x, y) = (-y, x)$ e $C = \{(1,0), (0,1)\}$ uma base de C^2 . Vamos determinar seus autovalores e autovetores associados. Temos

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (0,1) = 0 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1) \\ T(0,1) &= (-1,0) = -1 \cdot (1,0) + 0 \cdot (0,1) \end{aligned}$$

Então,

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Desse modo, o polinômio característico de T é

$$p_T(x) = det \left(x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = det \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = x^2 + 1.$$

É importante lembrar que λ será um autovalor quando $\lambda^2 + 1 = 0$, pois os autovalores do operador são as raízes do seu polinômio característico. Nesse caso em particular teremos dois valores para λ , ou seja, os dois autovalores são i e $-i$, visto que $(x + i)(x - i) = x^2 + 1$.

Para encontrarmos os autovetores associados a i vamos determinar o núcleo de $iI - T$.

$$[iI - T]_C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

Assim,

$$[iI - T]_C \cdot [v]_C = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ia + b \\ -a + ib \end{pmatrix}$$

Logo, $v = (a, b) \in Aut_T(i)$, se e somente se,

$$\begin{pmatrix} ia + b \\ -a + ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

isto é, v é um múltiplo escalar de $(i, 1)$ e, assim, $Aut_T(i) = [(i, 1)]$. Agora encontraremos os autovetores associados a $-i$.

$$[-iI - T]_c = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

Assim,

$$[iI - T]_c \cdot [w]_c = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ic + d \\ -c - id \end{pmatrix}$$

Desse modo, $w = (c, d) \in Aut_T(-i)$, se e somente se,

$$\begin{pmatrix} -i \cdot c + d \\ -c - id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou seja, w é um múltiplo escalar de $(i, -1)$ e, assim, $Aut_T(-i) = [(i, -1)]$. Observe que o conjunto $B = \{(i, 1), (i, -1)\}$ é base de C^2 . Assim T é diagonalizável e $[T]_B$ é expressa da seguinte forma

$$[T]_B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

pois

$$\begin{aligned} T(i, 1) &= (-1, i) = i \cdot (i, 1) + 0 \cdot (i, -1) \\ T(i, -1) &= (1, i) = 0 \cdot (i, 1) - i \cdot (i, -1) \end{aligned}$$

Analisando os Exemplos 3 e 4 vemos que o corpo é importante para o cálculo dos autovalores de um operador linear.

Teorema 1. Sejam $T: U \rightarrow U$ um operador linear, onde U é um espaço vetorial de dimensão finita e $\lambda_1, \dots, \lambda_t$, autovalores de T , dois a dois distintos.

- Se $v_1 + \dots + v_t = 0$ com $v_i \in Aut_T(\lambda_i)$, então $v_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq t$.
- Para todo $1 \leq i \leq t$, seja B_i um conjunto linearmente independente contido em $Aut_T(\lambda_i)$. Então $B_1 \cup \dots \cup B_t$ é linearmente independente.

Demonstração. a) Vamos provar este item por indução sobre t . No caso em que $t = 1$, não tem o que provar, pois $v_1 = 0$. Consideremos agora $t > 1$ e que a afirmação é verdadeira para todo j com $1 \leq j \leq t - 1$. Vamos mostrar agora que a afirmação é verdadeira para t . Sejam $v_i \in Aut_T(\lambda_i)$ para todo $1 \leq i \leq t$ tais que

$$v_1 + v_2 + \dots + v_t = 0 \tag{2}$$

Aplicando T em ambos os membros (2) vamos ter:

$$0 = T(0) = T(v_1 + v_2 + \dots + v_t) = T(v_1) + T(v_2) + \dots + T(v_t)$$

Usando o fato de que $v_i \in Aut_T(\lambda_i)$ teremos que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_t v_t = 0$$

Multiplicando (2) por λ_1 e subtraindo de (3) membro a membro, obtemos

$$(\lambda_1 - \lambda_2)v_2 + \dots + (\lambda_1 - \lambda_t)v_t = 0$$

Pela hipótese de indução concluímos que $(\lambda_1 - \lambda_i)v_i = 0$, isso para cada $i = 2, \dots, t$. Sabendo que $\lambda_1 \neq \lambda_i$, pois $i \neq 1$, então $v_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq t$.

b) Sejam $B_i = \{v_{i1}, \dots, v_{in_i}\}$ conjuntos linearmente independentes contidos em $Aut_T(\lambda_i)$ para todo $1 \leq i \leq t$. Vamos provar que $\{v_{11}, \dots, v_{1n_1}, v_{21}, \dots, v_{2n_2}, \dots, v_{t1}, \dots, v_{tn_t}\}$ é LI.

Suponhamos que

$$\alpha_{11}v_{11} + \dots + \alpha_{1n_1}v_{1n_1} + \alpha_{21}v_{21} + \dots + \alpha_{2n_2}v_{2n_2} + \dots + \alpha_{t1}v_{t1} + \dots + \alpha_{tn_t}v_{tn_t} = 0$$

Como $\alpha_{11}v_{11} + \alpha_{21}v_{21} + \dots + \alpha_{t1}v_{t1} \in Aut_T(\lambda_1), \dots, \alpha_{1n_1}v_{1n_1} + \alpha_{2n_2}v_{2n_2} + \dots + \alpha_{tn_t}v_{tn_t} \in Aut_T(\lambda_t)$ do Item a) desse teorema que $\alpha_{ij}v_{ij} = 0$, isso para cada i e j . Como cada B_i é LI, segue que $\alpha_{ij} = 0$. Assim mostramos que $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_t$ é linearmente independente.

Corolário 1. Seja $T: U \rightarrow U$ um operador linear, onde U é um espaço vetorial de dimensão finita. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ são todos autovalores de T , então T é diagonalizável se, e somente se, $\dim_{\mathbb{K}}(U) = \sum_{i=1}^t \dim_{\mathbb{K}}(Aut_T(\lambda_i))$.

Demonstração. Ver Coelho; Lourenço (2018).

Definição 3. Seja λ um autovalor de um operador linear $T: U \rightarrow U$ onde U é um espaço vetorial de dimensão finita e suponhamos que $p_T(x) =$, com $q(\lambda) \neq 0$. O número m é chamado de multiplicidade algébrica de λ e o denotamos por $ma(\lambda)$. Chamamos de multiplicidade geométrica de λ à dimensão do subespaço $Aut_T(\lambda)$ e indicamos tal número por $mg(\lambda)$.

Proposição 2. Seja λ um autovalor de $T: U \rightarrow U$, onde U é um espaço vetorial de dimensão finita. Então $mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$.

Demonstração. Denotemos $mg(\lambda) = \dim_{\mathbb{K}}(Aut_T(\lambda)) = s$. Sejam $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_s\}$ uma base de $Aut_T(\lambda)$ e $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_s, w_{s+1}, \dots, w_n\}$ uma base de U que contém \mathcal{B}' . Como $T(w_i) = \lambda w_i$, isso para cada $i = 1, \dots, s$, escrevemos $[T]_{\mathcal{B}}$ na forma de blocos

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ A_1 \\ \\ \\ A_2 \end{matrix}$$

onde $A_1 \in M_{s \times (n-s)}(K)$ e $A_2 \in M_{(n-s) \times (n-s)}(K)$. Por meio de um simples cálculo obtemos

$$p_T(x) = \det(xI - [T]_{\mathcal{B}}) = (x - \lambda)^s \cdot \det(xI_{(n-s)} - A_2)$$

Por definição, temos que $ma(\lambda)$ é o maior índice j tal que divide $p_T(x)$. Portanto, $mg(\lambda) = s \leq ma(\lambda)$, como queríamos.

Agora considere um operador linear $T: U \rightarrow U$, onde U é um espaço vetorial de dimensão finita, de modo que o polinômio característico é escrito na forma $p_T(x) = \lambda_1^{n_1} \cdots (x - \lambda_t)^{n_t}$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$ são todos os autovalores do operador T . Vamos ter que n_1, \dots, n_t serão as dimensões respectivamente dos autoespaços $Aut_T(\lambda_1), \dots, Aut_T(\lambda_t)$, quando $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$ para cada i , isso significa que T é diagonalizável, e então $dim_K(U) = n_1 + \cdots + n_t$ pelo que vimos no Corolário 1.

O próximo teorema resume o que foi discutido até aqui.
Teorema 2. Seja $T: U \rightarrow U$ um operador linear, onde U é um espaço vetorial de dimensão finita e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ os seus autovalores distintos. As seguintes afirmações são equivalentes.

- a) T é diagonalizável.
 - b) $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_t)^{n_t}$, $n_i \geq 1$ e $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$, para cada $i = 1, \dots, t$.
 - c) $dim_K(U) = \sum_{i=1}^t dim_{\mathbb{K}} Aut_T(\lambda_i)$
- Demonstração.* Ver Coelho; Lourenço (2018).

3 FERRAMENTAS

Nesta seção apresentaremos alguns tópicos que serão utilizados posteriormente na apresentação do conceito de Forma Canônica de Jordan.

3.1 Soma direta de espaços vetoriais

Um conceito importante que abordaremos agora, e que em algumas situações posteriores usaremos é o de soma direta.

Definição 4. Sejam W_1, \dots, W_n subespaços vetoriais de um espaço vetorial U . Chamaremos a soma $W_1 + \cdots + W_n$ de direta quando

$$W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_n) = \{0\},$$

para todo $1 \leq i \leq n$, e a denotaremos por $W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$.

Proposição 3. Considere U um K -espaço vetorial e sejam W_1, \dots, W_n subespaços de U . Então o espaço vetorial U pode ser escrito como $U = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ se, e somente se, todo

$u \in U$ pode ser escrito de maneira única como $u = u_1 + \dots + u_n$, em que $u_i \in W_i$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Demonstração. Suponhamos que $U = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ e que $u \in U$ escreve-se das seguintes formas

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

com $u_i, v_i \in W_i$, onde $1 \leq i \leq n$. Para cada $1 \leq i \leq n$,

$$u_i - v_i = v_1 - u_1 + \dots + v_{i-1} - u_{i-1} + v_{i+1} - u_{i+1} + \dots + v_n - u_n$$

É claro que $(u_i - v_i) \in W_i$ e pela igualdade acima concluímos que

$$(u_i - v_i) \in (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_n)$$

Assim,

$$(u_i - v_i) \in W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_n) = \{0\},$$

logo $u_i = v_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Por outro lado, suponhamos por absurdo que a soma $W_1 + \dots + W_n$ não é direta, logo existe $z \neq 0$ tal que

$$z \in W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_n)$$

para algum $1 \leq i \leq n$. Mostraremos que podemos escrever z de duas formas distintas, contrariando a hipótese. É fácil ver que $z = z + 0$ com $z \in W_i$ e $0 \in W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_n$. Também, $z = 0 + z$, com $0 \in W_i$ e $z \in W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_n$, o que contradiz a hipótese. Logo, a soma $W_1 + \dots + W_n$ é direta.

Proposição 4. Seja W um subespaço não nulo de um espaço vetorial U . Então existe um subespaço $Z \subseteq U$ tal que $U = W \oplus Z$.

Demonstração. Se $W = U$ teremos então que $U = W \oplus \{0\}$, onde $Z = \{0\}$. Vamos considerar agora que $W \neq U$ e que $B_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ é uma base de W . Estendemos B_1 a uma base B de U , digamos $B = \{w_1, w_2, \dots, w_r, z_{r+1}, z_{r+2}, \dots, z_n\}$ e denotemos $B_2 = \{z_{r+1}, z_{r+2}, \dots, z_n\}$. Como $B = B_1 \cup B_2$, então segue que $U = W + Z$ em que Z é o espaço vetorial gerado por B_2 . É evidente que os conjuntos de vetores B_1 e B_2 são disjuntos, isso pois $B_1 \cup B_2 = B$ é LI. Consequentemente $W \cap Z = \{0\}$, ou seja $U = W \oplus Z$.

3.2 Subespaços T -invariantes

Definição 5. Seja $T: U \rightarrow U$ um operador linear e $W \subseteq U$ um subespaço de U . Dizemos que W é um subespaço T -invariante de U se $T(w) \in W$ para todo $w \in W$.

Alguns exemplos clássicos de subespaços T -invariantes são:

- O subespaço $Nuc(T)$ é T -invariante.

- Se λ for um autovalor de T , então $Aut_T(\lambda)$ é um subespaço T -invariante de U . De fato, se $v \in Aut_T(\lambda)$, então $T(v) = \lambda v \in Aut_T(\lambda)$.

Além disso se W é um subespaço T -invariante, então a restrição de T a W , denotado por $T|_W: W \rightarrow W$, é um operador linear.

Exemplo 5. Seja $T: C^3 \rightarrow C^3$ definida por $T(x, y, z) = (0, x, y)$. Se $W = [e_1, e_2]$, então $T(W) = [e_2, e_3]$ e assim W não é um subespaço T -invariante de C^3 . Se $W' = [e_2, e_3]$, teremos então que $T(W') = [e_3] \subseteq W'$ e assim que W' é um subespaço T -invariante.

Lema 1. Sejam $T: U \rightarrow U$ um operador linear, em que U é um espaço vetorial de dimensão finita e W um subespaço vetorial T -invariante, com $dim_K(W) = m$ e $1 \leq m < n$. Seja B' uma base de W , se a estendermos para uma base B de U , então a matriz $[T]_B$ é escrita da seguinte forma:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T|_W]_{B'} & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

em que $A \in M_{m \times (n-m)}(K)$, $B \in M_{(n-m) \times (n-m)}(K)$ e 0 é a matriz nula em $M_{(n-m) \times m}(K)$.

Demonstração. Sejam $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ e $B = \{w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$. Digamos que

$$[T|_W]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Agora aplicando a transformação T nos vetores da base B temos:

$$\begin{aligned} T(w_1) &= a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m + 0v_{m+1} + \dots + 0v_n \\ &\vdots \\ T(w_m) &= a_{1m}w_1 + \dots + a_{mm}w_m + 0v_{m+1} + \dots + 0v_n \\ T(v_{m+1}) &= a_{1(m+1)}w_1 + \dots + a_{m(m+1)}w_m + a_{(m+1)(m+1)}v_{m+1} + \dots + a_{n(m+1)}v_n \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m + a_{(m+1)n}v_{m+1} + \dots + a_{nn}v_n. \end{aligned}$$

Assim conseguimos os coeficientes de cada coluna da matriz $[T]_B$, visto que são os escaleres de cada uma das respectivas combinações lineares.

$$[T]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & a_{1(m+1)} & a_{1(m+2)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & a_{2(m+1)} & a_{2(m+2)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & a_{m(m+1)} & a_{m(m+2)} & \dots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{(m+1)(m+1)} & a_{(m+1)(m+2)} & \dots & a_{(m+1)n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{(m+2)(m+1)} & a_{(m+2)(m+2)} & \dots & a_{(m+2)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n(m+1)} & a_{n(m+2)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

como queríamos.

O próximo teorema se trata da generalização do lema anterior.

Teorema 3. Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ e $T: U \rightarrow U$ um operador linear tal que $U = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$, em que W_i é um subespaço T -invariante com base B_i , para todo $1 \leq i \leq r$. Seja também $B = B_1 \cup \cdots \cup B_r$ uma base do espaço vetorial U , então a matriz $[T]_B$ se escreve da seguinte maneira

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T_1]_{B_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & [T_r]_{B_r} \end{pmatrix}$$

onde cada matriz $[T_i]_{B_i}$ é a matriz do operador T_{W_i} com relação à base B_i .

Demonstração. Ver Coelho; Lourenço (2018).

Com a notação do Teorema 3, a descrição de $[T]_B$ será reduzida à descrição das matrizes $[T_1]_{B_1}, \dots, [T_r]_{B_r}$. Com isso, também escreveremos $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_r$ e diremos que o operador T é soma direta dos operadores T_1, T_2, \dots, T_r . Um outro fato que decorre do Teorema 3 e que nos utilizaremos dele em demonstrações futuras, é o corolário abaixo.

Corolário 2. Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ e $T: U \rightarrow U$ um operador linear. Se $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_r$, então $p_T(x) = p_{T_1}(x) \cdots p_{T_r}(x)$.

Demonstração. Pela hipótese sabemos que a matriz $[T]_B$ será da forma:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T_1]_{B_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & [T_r]_{B_r} \end{pmatrix}$$

Calcularemos agora o polinômio característico de T :

$$p_T(x) = \det(xI - [T]_B) = \det \begin{pmatrix} xI_1 - [T_1]_{B_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & xI_r - [T_r]_{B_r} \end{pmatrix}$$

onde I_i é a matriz identidade de ordem igual a de cada matriz $[T_i]_{B_i}$. É evidente que a matriz em questão possui todas as entradas nulas, com exceção dos blocos da diagonal principal. Desse modo,

$$p_T(x) = \det(xI_1 - [T]_{B_1}) \cdots \det(xI_r - [T]_{B_r}) = p_{T_1}(x) \cdots p_{T_r}(x).$$

3.3 Polinômio minimal e o Teorema de Cayley-Hamilton

Definição 6. O polinômio minimal de um operador linear $T: U \rightarrow U$ é o polinômio mônico $m_T(x)$ de menor grau tal que $m_T(T)(v) = 0$, para todo $v \in U$.

É importante mostrarmos a associação entre os polinômios característico e minimal, isso pois ambos têm a mesmas raízes e o característico é um múltiplo do polinômio minimal. Essas características são utilizadas para a descrição das formas de Jordan.

Teorema 4 (Teorema de Cayley-Hamilton). Um operador linear $T : U \rightarrow U$ é um zero de seu polinômio característico $p_T(x)$, isto é, $p_T(T) = 0$.

Demonstração. Seja B uma base de U . Escrevemos $M = [T]_B$ e $M' = (xI - M)$, então pela construção de M' teremos que $\det(M') = p_T(x)$. Além disso considere $A = ad(M') = (a_{ij})$ que é a notação para matriz adjunta de M' , em outras palavras a matriz A é a transposta da matriz dos cofatores de M' . Como cada elemento da matriz A , que é a_{ij} é um cofator de $M' = (xI - M)$ teremos que cada elemento de A vai ser um polinômio de grau no máximo $n - 1$, que podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$a_{ij} = a_{ij}^{(0)} + a_{ij}^{(1)}x + \dots + a_{ij}^{(n-1)}x^{n-1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} + \dots + a_{11}^{(n-1)}x^{n-1} & a_{12}^{(0)} + \dots + a_{12}^{(n-1)}x^{n-1} & \dots & a_{1n}^{(0)} + \dots + a_{1n}^{(n-1)}x^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} + \dots + a_{n1}^{(n-1)}x^{n-1} & a_{2n}^{(0)} + \dots + a_{2n}^{(n-1)}x^{n-1} & \dots & a_{nn}^{(0)} + \dots + a_{nn}^{(n-1)}x^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & \dots & a_{nn}^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} x + \dots + \begin{pmatrix} a_{11}^{(n-1)} & \dots & a_{1n}^{(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(n-1)} & \dots & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} x^{n-1}. \end{aligned}$$

Podemos representar essa soma de matrizes como sendo, $A = A^{(0)} + A^{(1)} + \dots + A^{(n-1)}$. Escrevemos o polinômio característico como $p_T(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, vamos calcular $A \cdot M'$ usando o seguinte fato estudado em álgebra:

$$A \cdot M' = ad(M') \cdot M' = \det(M') \cdot I_n = p_T(x) \cdot I_n = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \cdot I_n \quad (4)$$

Por outro lado,

$$A \cdot M' = ad(M') \cdot M' = (A^{(0)} + A^{(1)} + \dots + A^{(n-1)}) \cdot (xI_n - M). \quad (5)$$

Combinando (4) e (5) obtemos

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \cdot I_n = (A^{(0)} + A^{(1)} + \dots + A^{(n-1)}) \cdot (xI_n - M).$$

Comparando termo a termo obtemos:

$$\begin{cases} a_0 I_n & = & -A^{(0)} M \\ a_1 I_n & = & A^{(0)} - A^{(1)} M \\ & \vdots & \\ a_{n-1} I_n & = & A^{(n-2)} - A^{(n-1)} M \\ I_n & = & A^{(n-1)} \end{cases}$$

Agora multiplicamos cada equação acima pelas respectivas matrizes: $I, M, M^2, \dots, M^{n-1}, M^n$.

$$\begin{cases} a_0 I_n = -MA^{(0)} \\ a_1 M = MA^{(0)} - M^2 A^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n-1} M^{n-1} = M^{(n-1)} A^{(n-2)} - M^{(n)} A^{(n-1)} \\ M^{(n)} = M^n A^{(n-1)} \end{cases}$$

Observando a construção do sistema vemos que o somatório do lado direito de todas as equações se anula, então somando as equações uma a uma, encontramos:

$$a_0 I + a_1 M + \dots + a_{n-1} M^{n-1} + M^n = 0$$

como já foi mencionado o polinômio característico é $p_T(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$. É evidente que o polinômio obtido somando as expressões será $p_T(M) = 0$, e como $M =$ concluímos então que $p_T(T) = 0$.

Proposição 5. O polinômio minimal $m_T(x)$ de T é um divisor do polinômio característico $p_T(x)$ de T .

Demonstração. Pelo Teorema de Cayley Hamilton sabemos que $p_T(T) = 0$ e pelo algoritmo de divisão de polinômios teremos que $p_T(x) = m_T(x) \cdot q(x) + r(x)$. Calculando $p_T(T)$ temos que $p_T(T) = m_T(T) \cdot q(T) + r(T) = 0$. Por definição sabemos que $m_T(T) = 0$, logo $0 \cdot q(T) + r(T) = 0$. Isso equivale a dizer que $r(T) = 0$, ou seja T é uma raiz de $r(x)$; entretanto, isso não pode ocorrer, pois $m_T(x)$ é o polinômio de menor grau tal que $m_T(T) = 0$, e pelo algoritmo de divisão de polinômios sabemos que o grau de $r(x)$ é menor que o $m_T(x)$ ou $r(x) = 0$. Assim, $r(x) = 0$ e, conseqüentemente, $p_T(x)$ é um múltiplo de $m_T(x)$, em outras palavras $m_T(x)$ divide $p_T(x)$.

3.4 Operadores nilpotentes

Definição 7. Um operador linear $T: U \rightarrow U$ é chamado nilpotente se existir um inteiro positivo m , tal que $T \circ \dots \circ T = T^m = 0$. O menor índice que satisfaz esta condição será denominado índice de nilpotência.

Exemplo 6. O operador linear T com matriz dada por

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é um operador nilpotente. Com efeito,

$$T^3 = T \circ T \circ T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema 5. Seja $T: U \rightarrow U$ um operador linear. Então T pode ser decomposto de modo único como uma soma direta de um operador nilpotente e um operador invertível.

Demonstração. Ver Almeida (2011).

Proposição 6. Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T: U \rightarrow U$ um operador linear nilpotente de índice $m \geq 1$. Se $v \in U$ é tal que $T^{m-1}(v) \neq 0$, então:

- a) $\lambda = 0$ é o único autovalor de T .
- b) O conjunto $\{v, T(v), \dots, T^{m-1}(v)\}$ é LI.
- c) Existe um subespaço T -invariante W de U tal que $U = V \oplus W$, onde

$$V = [v, T(v), \dots, T^{m-1}(v)]$$

- d) A restrição $T|_W: W \rightarrow W$ é um operador nilpotente, com índice de nilpotência $m' \leq m$.

Demonstração. Ver Almeida (2011).

Teorema 6. Seja $T: U \rightarrow U$ um operador linear nilpotente com índice de nilpotência $m \geq 1$, onde U é um espaço vetorial de dimensão finita. Então existem inteiros positivos t, m_1, m_2, \dots, m_t e vetores $v_1, v_2, \dots, v_t \in U$ tal que:

a) $m = m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_t$.

b) O conjunto $B = \left\{ \begin{array}{l} v_1, T(v_1), T^2(v_1), \dots, T^{m_1-1}(v_1), \\ v_2, T(v_2), T^2(v_2), \dots, T^{m_2-1}(v_2), \\ \vdots \\ v_t, T(v_t), T^2(v_t), \dots, T^{m_t-1}(v_t) \end{array} \right\}$ é uma base de V .

c) $T^{m_i}(v_i) = 0$ para todo $1 \leq i \leq t$.

Demonstração. Ver Almeida (2011).

4 FORMA CANÔNICA DE JORDAN

Definição 8. Chamamos de bloco de Jordan $r \times r$ em $\lambda \in K$, a matriz $J_r(\lambda) \in M_r(K)$ que tem λ na diagonal principal e 1 em toda a diagonal abaixo da principal, ou seja, é uma matriz do tipo:

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Exemplo 7. Seja $T: U \rightarrow U$ um operador linear satisfazendo:

1. U tem dimensão finita $n \geq 1$;

2. T é nilpotente com índice de nilpotência n .

Então existe uma base B de U tal que $[T]_B = J_n(0)$. Com efeito, como o índice de nilpotência do operador T é n , segue que existe $v \in V$ tal que $T^{n-1}(v) \neq 0$. Da Proposição 6 vem que $B = \{v, T(v), \dots, T^{n-1}(v)\}$ é LI e por $B \vee n$ e $\dim_K(V) = n$ segue que B é base de U .

Note que:

$$\begin{aligned} T(v) &= 0v + 1T(v) + 0T^2(v) + \dots + 0T^{n-2}(v) + 0T^{n-1}(v) \\ T(T(v)) &= 0v + 0T(v) + 1T^2(v) + \dots + 0T^{n-2}(v) + 0T^{n-1}(v) \\ T(T^2(v)) &= 0v + 0T(v) + 0T^2(v) + \dots + 0T^{n-2}(v) + 0T^{n-1}(v) \\ &\vdots \\ T(T^{n-2}(v)) &= 0v + 0T(v) + 0T^2(v) + \dots + 0T^{n-2}(v) + 1T^{n-1}(v) \\ T(T^{n-1}(v)) &= 0v + 0T(v) + 0T^2(v) + \dots + 0T^{n-2}(v) + 0T^{n-1}(v). \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 8. Seja $T: U \rightarrow U$ um operador linear nilpotente com índice de nilpotência m e t, m_1, m_2, \dots, m_t e B como no enunciado do Teorema 29. Então,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{m_t}(0) \end{pmatrix}$$

Para nossa melhor compreensão é importante pontuarmos que quando temos um operador $T: U \rightarrow U$ sendo a $\dim_K(U) = n$, onde $n \geq 1$ e $p_T(x) = 0$. Pelo teorema de Cayley-Hamilton, $p_T(T) = 0$, logo, $(T - \lambda I)^n = 0$, concluimos assim que o operador $T - \lambda I$ é nilpotente. Logo, pelo Exemplo 7 segue que existe uma base B de V tal que $[T - \lambda I]_B = J_n(0)$.

Exemplo 9. Seja $T: U \rightarrow U$ um operador linear tal que:

1. U tem dimensão finita $n \geq 1$;
2. $T - \lambda I$ é nilpotente de índice n .

Então existe uma base B de U tal que $[T]_B = J_n(\lambda)$. De fato, pelo Exemplo 7 existe uma base B de U tal que $[T - \lambda I]_B = J_n(0)$, ou seja,

$$[T - \lambda I]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mas isso equivale a dizer que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Teorema 7. Seja $T: U \rightarrow U$ um operador linear, onde U é um espaço vetorial de dimensão finita, tal que $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r}$, $m_i \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$, se $i \neq j$. Então $U = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r$, onde, para cada $i = 1, 2, \dots, r$, temos

- a) $\dim_K U_i = m_i$;
- b) O subespaço U_i é T -invariante;
- c) A restrição do operador $T - \lambda_i I$ a U_i é nilpotente.

Demonstração. Ver Almeida (2011).

Teorema 8 (Forma Canônica De Jordan). Considere $T: U \rightarrow U$ um operador linear tal que $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r}$ em que $r \geq 1$, $m_i \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, para todos $1 \leq i \leq r$. Então existem números inteiros $t_1, t_2, \dots, t_r, m_{11}, m_{12}, \dots, m_{1t_1}, m_{21}, m_{22}, \dots, m_{2t_2}, \dots, m_{r1}, m_{r2}, \dots, m_{rt_r}$ tais que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_{m_{11}}(\lambda_1) & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{m_{1t_1}}(\lambda_1) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & J_{m_{r1}}(\lambda_r) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & J_{m_{rt_r}}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

Demonstração. Vem do Teorema 7 que existe uma decomposição $U = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r$ satisfazendo:

- a) $\dim_K U_i = m_i$;
- b) O subespaço U_i é T -invariante;
- c) A restrição do operador $(\lambda_i I - T)$ a U_i é nilpotente.

Para cada $1 \leq i \leq r$ considere T_i a restrição de T a U_i , isto é o operador $T_i = T_{U_i}: U_i \rightarrow U_i$. Já vimos anteriormente que o operador $T_i - \lambda_i I$ é nilpotente, logo o Teorema 6 e os Exemplos 8 e 9 implicam que existe uma base B_i e números $t_i, m_{i1}, m_{i2}, \dots, m_{it_i}$ com $m_{i1} \geq m_{i2} \geq \dots \geq m_{it_i}$ satisfazendo

$$[T_i]_{B_i} = \begin{pmatrix} J_{m_{i1}}(\lambda_i) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{m_{it_i}}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

Como a soma $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$ é direta segue que $B = B_1 \cup \dots \cup B_r$ é base de U , logo

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T_1]_{B_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & [T_r]_{B_r} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 10. Seja T um operador linear com matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Vamos encontrar sua forma de Jordan. Com efeito,

$$\begin{aligned} p_A(x) = \det(xI - A) &= \det \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} x-1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & x-4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & x+2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & x-4 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -2 & x-3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Efetuando os cálculos vamos obter que $p_A(x) = e m_A(x) = (x - 2)^3$, fazendo $(x - 2)^5 = 0$ obtemos que a única raiz desse polinômio é 2 ou seja teremos apenas um autovalor, $\lambda = 2$. Um resultado conhecido é que a quantidade de blocos de Jordan de cada λ_i será determinada pela multiplicidade geométrica de cada λ_i , que nada mais é do que a dimensão do espaço $Nuc(\lambda_i I - T)$. Temos

$$2I - A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Temos que $(x, y, z, w, r) \in Nuc(2I - A)$ se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x - 2y + r = 0 \\ z - r = 0 \\ w - r = 0 \end{cases}$$

Pelas duas últimas equações do sistema temos que $z = r = w$, e usando esse fato na primeira equação obtemos $x = 2y - z$. Dessa forma concluímos que o $Nuc(2I - A) = [(2y - z, y, z, z, z) : y, z \in R]$, ou seja, possui dimensão 2, então vamos ter 2 blocos de Jordan. Importante salientar que o índice do polinômio minimal $m_A(x)$ que é 3 define a ordem do maior bloco de Jordan que temos. Como vimos que são dois blocos, como um deles será de ordem 3 e o outro vai ser de ordem 2. Assim a matriz desse operador escrito na Forma Canônica De Jordan ficará da seguinte forma

$$J_T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 11. Seja $T: C^4 \rightarrow C^4$ um operador linear dado pela seguinte lei de formação

$$T(x, y, z, w) = (8x - y, 4x + 12y, 9z + 2w, 2z + 6w)$$

Vamos calcular sua forma de Jordan. Primeiramente calculamos a matriz $[T]_B$, onde B é base canônica.

$$\begin{aligned} T(1,0,0,0) &= 8 \cdot (1,0,0,0) + 4 \cdot (0,1,0,0) + 0 \cdot (0,0,1,0) + 0 \cdot (0,0,0,1) \\ T(0,1,0,0) &= -1 \cdot (1,0,0,0) + 12 \cdot (0,1,0,0) + 0 \cdot (0,0,1,0) + 0 \cdot (0,0,0,1) \\ T(0,0,1,0) &= 0 \cdot (1,0,0,0) + 0 \cdot (0,1,0,0) + 9 \cdot (0,0,1,0) + 2 \cdot (0,0,0,1) \\ T(0,0,0,1) &= 0 \cdot (1,0,0,0) + 0 \cdot (0,1,0,0) + 2 \cdot (0,0,1,0) + 6 \cdot (0,0,0,1) \end{aligned}$$

Assim,

logo,

$$p_T(x) = \det \left(\begin{pmatrix} x-8 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & x-12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & x-6 \end{pmatrix} \right) = (x-5)(x-10)^3.$$

Dessa forma $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 10$ são os dois autovalores desse operador linear e o polinômio minimal poderá ser $(x - 5)(x - 10)$, $(x - 5)$ ou $(x - 5)$. Isso pois o polinômio minimal é um múltiplo escalar do polinômio característico e como já vimos anteriormente, suas raízes são os autovalores do operador linear, que também são raízes do polinômio característico. Note que $([T]_B - 5)([T]_B - 10) \neq 0$ e que $([T]_B - 5)([T]_B - 10)^2 = 0$, assim $m_T(x) = (x - 5)(x - 10)^2$. Como o maior índice do polinômio minimal é 2 segue que vamos ter um bloco de Jordan de ordem 2 associado ao autovalor 10, da mesma forma como no outro fator do polinômio minimal temos índice 1 concluímos que teremos um bloco de Jordan de ordem 1 associado ao autovalor 5.

Agora para calcular a quantidade de blocos de Jordan associados aos autovalores 5 e 10 precisaremos calcular as dimensões dos subespaços $Nuc(5I - T)$ e $Nuc(10I - T)$.

$$5I - T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Temos que $(x, y, z, w) \in Nuc(5I - T)$ se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtemos como solução $(0, 0, -\frac{1}{2}w, w)$, para algum $w \in \mathbb{C}$, logo o $Nuc(5I - T) = \left[\left(0, 0, -\frac{1}{2}w, w \right) : w \in \mathbb{C} \right]$. É fácil ver que a dimensão do núcleo é 1, consequentemente, teremos apenas um bloco de Jordan associado ao autovalor 5. Como já era conhecido que esse bloco teria ordem 1.

Também,

$$10I - T = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Temos que $(x, y, z, w) \in Nuc(10I - T)$ se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtemos como solução $\left(\frac{-1}{2}y, y, 2w, w \right)$, tal que $y, w \in \mathbb{C}$, logo o $Nuc(10I - T) = \left[\left(\frac{-1}{2}y, y, 2w, w \right) : y, w \in \mathbb{C} \right]$. É evidente que $dim_K(Nuc(10I - T)) = 2$;

isso equivale a dizer que vamos ter dois blocos de Jordan associados ao autovalor 10. Descobrimos anteriormente, por meio do grau do polinômio minimal $m_T(x)$, que existe um bloco de Jordan associado ao autovalor 10 de ordem 2.

Podemos determinar a ordem do outro bloco de Jordan associado ao autovalor 10 pelo seguinte raciocínio: Se temos um bloco $J_1(5)$ de ordem 1 e outro bloco $J_2(10)$ de ordem 2, então o último bloco de Jordan deverá ter ordem 1.

Concluimos então que a forma canônica do operador T é

$$J_T = \begin{pmatrix} J_2(10) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(10) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

5 CONCLUSÕES

Com base no que foi apresentado neste trabalho, destacamos a grande importância do estudo da Forma Canônica de Jordan, revelando-se um recurso essencial na compreensão e análise de operadores lineares em álgebra linear.

Enquanto a diagonalização é uma ferramenta poderosa para simplificar a representação de certos operadores, tornando sua análise mais acessível, nos deparamos com situações em que não é possível realizar este processo. A forma canônica de Jordan, ao incorporar blocos de Jordan, oferece uma representação valiosa para esses operadores, superando as limitações da diagonalização.

Portanto, concluimos que este trabalho possui a finalidade de realizar um estudo sobre operadores lineares e como ocorre processo de diagonalização, quais são os resultados que auxiliam nesse processo, bem como resolver o impasse quando se trata de um operador onde não é possível representá-lo por meio de uma matriz diagonal, e como a Forma Canônica De Jordan se mostra um conceito fundamental em Álgebra Linear para solucionar este impasse.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, A. G. F. **A forma canônica de Jordan e algumas aplicações**. 2011. 53 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, 2011.
- COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um curso de álgebra linear**. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2018.

CAPÍTULO IX

ESTUDO DA PRODUÇÃO DE CULTIVARES DE CEBOLA USANDO MODELOS MISTOS: ABORDAGEM COM ÊNFASE NO AMBIENTE ESTATÍSTICO R

DOI: 10.51859/amplla.epm963.1125-9

Haward Antunny da Silva Américo
antunnyamerico@gmail.com

Lucimary Afonso dos Santos
lucimary.afonso@unespar.edu.br

Marcos Vinicius de Oliveira Peres
mvoperes@uem.br

Vanderly Janeiro
vjaneiro@uem.br

RESUMO

Várias áreas do conhecimento demandam análises estatísticas para os dados coletados, e, quando o interesse é a busca por uma explicação para as relações existentes entre as variáveis envolvidas no processo, na verdade buscamos um modelo que melhor se ajuste aos dados e, por consequência, torne a análise eficaz. O objetivo deste artigo foi buscar a metodologia mais adequada a um conjunto de dados de competição de cultivares de cebola proveniente de um experimento em blocos completos ao acaso disponível na literatura, bem como o uso de técnicas computacionais que auxiliassem a análise. Foram considerados o uso de metodologia tradicional (apenas efeitos fixos) e o uso de modelos mistos (efeitos fixos e aleatórios). Os resultados apontaram que a utilização de um modelo linear com efeitos mistos foi mais eficiente na análise dos dados do que o modelo que considera apenas efeitos fixos. O cultivar Pera IPA 1 apresentou o maior rendimento dentre os cultivares testados. Concluiu-se ainda, que a utilização do R (R Development Core Team, 2023) proporcionou uma notável facilitação na análise dos dados, agilizando de forma eficiente as etapas e processos requeridos pela metodologia proposta. Esta metodologia, por sua vez, demonstrou-se adequada para a modelagem dos dados em questão. Todas as análises foram conduzidas no ambiente estatístico do R, conferindo robustez e confiabilidade aos resultados obtidos.

Palavras-chave: Modelo Misto. Delineamento de Blocos ao Acaso. Ambiente Estatístico R.

1 INTRODUÇÃO

A realização de experimentos envolve a execução planejada de alterações nas variáveis de entrada de um processo, visando observar e compreender as alterações na resposta ou variável de saída. Essas observações contribuem para melhorias em diversas áreas, e a construção de modelos relacionando variáveis facilita o aprimoramento do sistema.

A coleta de dados impacta os resultados, sendo assim, é importante que padrões sejam seguidos para descrever com precisão o comportamento dos dados. Experimentações são cruciais em pesquisas científicas, permitindo estabelecer relações de causa e efeito, testar hipóteses e embasar decisões. Desenvolver modelos matemáticos, sejam mecanicistas ou empíricos, é uma abordagem comum nesse processo.

Projetos experimentais na produção de produtos podem trazer benefícios significativos, como melhor desempenho e confiabilidade, além de redução de custos e tempo de desenvolvimento. O planejamento de experimentos é muito importante, envolvendo um plano sistemático para a coleta de dados, garantindo resultados representativos.

Experimentos são compostos por variáveis controláveis e variáveis que não podem ser controladas, as quais são essenciais para determinar a influência dessas variáveis na resposta. Há diversas estratégias de experimentação que podem ser empregadas para analisar a influência dos fatores na variável resposta.

Controlar variáveis é uma consideração fundamental ao projetar experimentos, com a aleatorização e uso de grupos de controle para garantir comparações válidas. A análise estatística, incluindo técnicas como ANOVA, regressão linear e modelos multivariados, é útil para interpretar dados e identificar diferenças significativas.

Os modelos permitem verificar os pressupostos estatísticos, garantindo a validade das análises, e desempenham um papel fundamental na compreensão das relações entre variáveis e na previsão de resultados. Essa abordagem sistemática contribui significativamente para a tomada de decisões e para o avanço do conhecimento em diversas áreas de pesquisa.

Dada a amplitude dos experimentos realizados, que frequentemente demandam análises estatísticas complexas e abrangentes, torna-se imperativo realizar uma exploração minuciosa das metodologias disponíveis. Tal exploração, quando aliada a recursos computacionais eficientes, é fundamental para lidar com os desafios apresentados por esses experimentos. Nesse contexto, o objetivo central deste trabalho foi aprofundar o entendimento e aplicar técnicas estatísticas relevantes a um conjunto de dados específico.

Ao aliar métodos estatísticos estabelecidos a uma plataforma computacional poderosa como o *R*, a pesquisa busca não apenas responder às demandas dos experimentos realizados, mas também contribuir para o avanço do conhecimento estatístico e agrônômico e sua aplicação em diferentes contextos de pesquisa e tomada de decisões.

Destacando-se como um ambiente estatístico poderoso e versátil, a utilização do software é notável devido à facilidade na interpretação dos dados, possibilitada por suas diversas funcionalidades, funções e pacotes dedicados à estatística experimental, proporcionando uma análise precisa e eficiente na construção dos modelos estatísticos.

Os recursos do *R* viabilizam a implementação de várias estratégias experimentais, e sua flexibilidade permite explorar diferentes abordagens, enriquecendo a condução e análise de experimentos de maneira abrangente.

No que diz respeito à análise estatística, o *R* oferece uma ampla gama de técnicas, desde análise de variância (ANOVA) até regressão linear e modelos multivariados. Essas ferramentas são cruciais para explorar relações entre variáveis, identificar fatores de influência e realizar testes estatísticos robustos, bem como para a criação de gráficos informativos, como gráficos de dispersão e gráficos de quantis normais, facilitando a visualização do comportamento dos dados.

Um dos grandes triunfos do *R* é sua comunidade ativa, que contribui para o desenvolvimento contínuo de pacotes estatísticos especializados. Pacotes como “ggplot2”, para visualização de dados e “lmtest”, para realizar testes específicos, incluindo o teste de homocedasticidade. Esses pacotes enriquecem as capacidades do *R*, proporcionando ferramentas adicionais para garantir a validade e confiabilidade das análises estatísticas.

A facilidade de implementação, a vasta gama de pacotes especializados e a qualidade nas análises tornam o *R* uma escolha proeminente para pesquisadores e profissionais que buscam conduzir experimentos de maneira eficaz. Sua flexibilidade e capacidade de lidar com complexidades estatísticas o tornam uma ferramenta essencial no campo da estatística experimental, contribuindo para avanços significativos na compreensão de padrões, relações e melhorias em diversos campos de pesquisa.

2 MATERIAIS E MÉTODOS

2.1 Materiais

Com o intuito de exemplificar a metodologia proposta os dados provenientes de um exemplo apresentado por Nogueira (2007) foram implementados no *R*.

Os dados são provenientes de uma competição de cultivares de cebola, em que foi obtido o peso total dos bulbos (g) de oito cultivares diferentes, distribuídos aleatoriamente em 4 talhões (blocos) sendo enumerados de 1 a 4, como apresentado na tabela 1:

Tabela 1 - Peso total dos bulbos de cebola

Cultivares	1	2	3	4
Baia do Cedo	1222	1195	1118	1002
Texas Grano	1452	1062	1195	1414
Pera IPA 1	1768	1482	1753	1805
Pera IPA 2	1870	1598	1437	1856
Pera IPA 3	1544	1300	1224	1500
Pera IPA 4	2100	2117	2150	1618
Pira Ouro	2063	2063	1707	1592
Red Creole	850	928	928	500

Fonte: Nogueira, 2007

2.2 Métodos

Em alguns experimentos, nas mais variadas áreas de interesse, fatores externos podem interferir na variável resposta e nem sempre são de interesse de estudo. Esses fatores podem ser tanto desconhecidos como não controláveis. O experimento em blocos é adequado para situações como esta, de modo que a fonte de variabilidade dos fatores seja conhecida ou de inferência controlável. É utilizado quando as unidades experimentais são heterogêneas.

O delineamento em blocos ao acaso incorpora três princípios fundamentais da experimentação: repetição, casualização e controle local. Nesse contexto, as condições locais apresentam heterogeneidade, o que pode impactar os efeitos dos tratamentos.

Em termos gerais, consideramos “ a ” tratamentos a serem comparados, distribuídos entre “ b ” blocos, cada um contendo uma observação para cada tratamento. A aleatorização dos tratamentos ocorre dentro de cada bloco. O modelo estatístico convencional que aborda essa situação é expresso pela equação (1):

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ij}, \begin{cases} i = 1, \dots, a \\ j = 1, \dots, b \end{cases}$$

sendo, y_{ij} o vetor de resposta para o i -ésimo grupo da j -ésima observação; μ é o valor de média geral; τ_i o efeito do i -ésimo tratamento; β_j o efeito do j -ésimo bloco e ϵ_{ij} é o termo de erro aleatório, com $\epsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ (Montgomery, 2017).

As hipóteses a serem testadas para os tratamentos são:

H_0 : os tratamentos possuem os mesmos efeitos, ou seja, $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \dots = \tau_a$.

H_1 : pelo menos dois tratamentos possuem efeitos diferentes entre si.

Em situações em que as suposições necessárias para os modelos estatísticos tradicionais não são atendidas, os modelos lineares mistos (MLM) emergem como ferramentas valiosas. Esses modelos são empregados para lidar com complexidades que não se adequam aos moldes dos modelos tradicionais.

De acordo com Pinheiro e Bates (2006), um delineamento em blocos casualizados envolve a consideração de dois fatores: um fator experimental, para o qual são levados em conta efeitos fixos, e um fator de bloco, frequentemente considerado como de efeitos aleatórios. Isto pode, de fato, ser justificado se os níveis do fator considerado bloco puderem, razoavelmente, ser considerados uma amostra representativa de uma população muito maior de blocos.

Adicionalmente, os blocos podem ser concebidos como agrupamentos nos quais o tratamento representa um fator com níveis variáveis dentro desse agrupamento. Mediante o banco de dados adotado o experimentador tem à sua disposição vários talhões, de forma que sua “escolha” ocorreu aleatoriamente.

Sendo assim, por meio da abordagem flexível proporcionada pela utilização dos modelos mistos, propõe-se como uma opção alternativa para a análise dos dados, o modelo (1) pode ser escrito da seguinte forma:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + b_j + \epsilon_{ij}, \begin{cases} i = 1, \dots, a \\ j = 1, \dots, b \end{cases} \quad (2)$$

em que:

- y_{ij} o vetor de resposta para o i -ésimo grupo da j -ésima observação;
- μ é o valor de média geral;
- τ_i o efeito do i -ésimo tratamento;
- b_j o efeito aleatório do j -ésimo bloco (talhões).

Ao considerarmos blocos com efeito aleatório, o modelo (2) apresenta dois termos aleatórios e independentes, como colocado por Pinheiro e Bates (2000):

$$b_j \stackrel{iid}{\sim} N(0, \mathbf{G}) \text{ e } \epsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \mathbf{R})$$

As fontes de variação neste modelo são elucidadas pelas matrizes de covariância dos efeitos aleatórios (\mathbf{G}) e dos erros aleatórios (\mathbf{R}). As matrizes permitem a inclusão de correlação entre as observações e capturam a estrutura de covariância associada aos efeitos aleatórios e aos erros aleatórios, respectivamente, sendo apresentadas da seguinte maneira:

$$G = \sigma_u^2 I_q \text{ e } R = \sigma^2 I_n$$

$$G_{(q \times q)} = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_u^2 \end{bmatrix}$$

$$R_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Considerando que o modelo engloba tanto efeitos aleatórios (blocos) quanto efeitos fixos (tratamentos), cada efeito aleatório no modelo contribui para um componente de variância.

O termo de erro residual ϵ_{ij} pode ser interpretado como um efeito aleatório, e, conseqüentemente, a variância residual σ^2 é um componente de variância.

Para compreender as diferenças conceituais entre os modelos (1) e (2), a tabela 2 apresenta três características teóricas dos modelos:

1. O valor esperado da ij -ésima observação $\rightarrow y_{ij}$;
2. A variância da ij -ésima observação $\rightarrow y_{ij}$;
3. A relação entre duas observações diferentes (covariância/correlação)

Tabela 2 - Características teóricas dos modelos (1) e (2)

Caract.	Modelo fixo (1)	Modelo aleatório (2)
1. $E(y_{ij})$	$\mu + \tau_i + \beta_j$	$\mu + \tau_i$
2. $Var(y_{ij})$	σ^2	$\sigma_u^2 + \sigma^2$
3. $Cov(y_{ij}, y_{i'j'}); i \neq i'$	0	σ_u^2 (se $j = j'$) 0 (se $j \neq j'$)

Fonte: Elaborada pelos autores.

Os valores esperados e as variâncias revelam como os efeitos de blocos são incorporados aos modelos. No modelo misto, esses efeitos contribuem para a componente de variância, inserindo-se na parte aleatória do modelo como um componente adicional de variância. Por outro lado, no modelo de efeitos fixos, esses efeitos são considerados na parte esperada (fixa/sistemática) do modelo.

2.3 Método para estimação dos parâmetros

Conforme Yamanouchi (2017), a maximização da função de verossimilhança é derivada do processo de estimação de máxima verossimilhança, que, neste contexto, baseia-se na

distribuição do modelo marginal. Para cada indivíduo i , a variável y_i segue uma distribuição normal multivariada, caracterizada por uma função de densidade.

Portanto, a função de verossimilhança $L(\theta|y_i)$ é da seguinte forma:

$$L(\theta|y_i) = \prod_{i=1}^m (2\pi)^{-\frac{n_i}{2}} |\mathbf{V}_i|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \beta)' \mathbf{V}_i^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \beta) \right\} \quad (3)$$

e o algoritmo da função de verossimilhança, $l(\theta | y_i)$

$$l(\theta|y_i) = \ln \{L(\theta|y_i)\} = -\frac{N}{2} \ln (2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \ln (|\mathbf{V}_i|) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \beta)' \mathbf{V}_i^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \beta) \quad (4)$$

em que, $N = \sum_{i=1}^m n_i$ e $\ln ()$ representa o logaritmo na base e . Ao utilizar o método de máxima verossimilhança restrita (MVR), observa-se que as estimativas dos componentes de variância tendem a ser menos enviesadas. Isso ocorre devido à capacidade de corrigir o viés na estimação de parâmetros proporcionada por este método, podendo ser escrito como:

$$l_R(\theta) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi) \sum_{i=1}^m n_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \ln |V_i| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (\mathbf{y}_i - X_i \hat{\beta})' V_i^{-1} (\mathbf{y}_i - X_i \hat{\beta}) - \frac{1}{2} \ln \left| \sum_{i=1}^m X_i' V_i^{-1} X_i \right| \quad (5)$$

Portanto, ao maximizar essas equações, obtemos as estimativas de MVR para θ .

2.4 Verificação dos Pressupostos do Modelo

A análise cuidadosa dos pressupostos em um modelo estatístico desempenha um papel vital na garantia da qualidade e validade das análises de dados. Essa prática não apenas válida a qualidade do modelo, mas também influencia diretamente a confiabilidade das conclusões e a interpretação dos resultados obtidos.

A validade das inferências estatísticas está intrinsecamente relacionada à conformidade com os pressupostos do modelo. Quando essas condições não são atendidas, as conclusões derivadas do modelo tornam-se questionáveis, comprometendo a confiabilidade das análises. A interpretação adequada dos resultados depende diretamente da satisfação desses pressupostos, e a ausência de verificação pode conduzir a interpretações equivocadas, distorcendo a compreensão dos padrões e relações nos dados.

A verificação dos pressupostos abrange os testes de homogeneidade das variâncias e normalidade dos resíduos, sendo fundamental para fomentar a confiança nas conclusões e decisões baseadas em análises estatísticas.

A homogeneidade das variâncias é particularmente crucial em várias áreas experimentais, baseando-se na premissa de que as populações amostrais têm igualdade de variância. A falta de homogeneidade pode interferir no desempenho do método, prejudicando os resultados de diferentes maneiras.

Já a verificação de normalidade dos resíduos pode ser realizada por meio do teste de Shapiro-Wilk. A hipótese nula do teste é que os dados são normalmente distribuídos. Um valor- p maior que um nível de significância escolhido sugere que os dados podem ser considerados aproximadamente normais.

Desconsiderar essas etapas pode comprometer a qualidade e confiabilidade dos resultados, distorcendo a compreensão dos padrões subjacentes nos dados analisados.

2.5 Identificação de outliers

Em meio à complexidade da análise de dados, deparamo-nos com a descoberta de possíveis problemas que podem surgir durante o processo. Esses contratemplos, muitas vezes manifestados na forma de outliers ou dados que se destacam, podem indicar desde falhas na execução do experimento até a revelação de fatos até então negligenciados pelo pesquisador. A sutil sugestão de que uma distribuição diferente poderia explicar de maneira mais precisa o comportamento dos dados adiciona uma camada de profundidade ao desafio que enfrentamos na interpretação estatística.

No âmbito prático, a detecção desses dados singulares torna-se uma jornada visual, por meio de gráficos como histogramas, boxplots e gráficos de ramos e folhas.

2.6 História do software *R*

No universo da análise matemática, o *R* emerge como uma ferramenta incrivelmente versátil e robusta, pronta para ser explorada por estudantes, pesquisadores e profissionais. Desenvolvido com maestria no Bell Laboratories por John Chambers e sua equipe, o *R* se destaca como uma interpretação inovadora da linguagem *S*, oferecendo uma gama diversificada de técnicas estatísticas e gráficos.

Um dos aspectos mais interessantes do *R* é a sua capacidade de criar gráficos de qualidade de forma intuitiva, ao mesmo tempo em que coloca o controle nas mãos dos usuários. Essa atenção especial ao design transparece em cada detalhe do software. E, vale ressaltar, o *R* é um Software Livre, seguindo a Licença Pública Geral GNU, sendo acessível em diversas plataformas, de UNIX e Linux a Windows e MacOS, informações disponíveis no site do R Project (<https://www.r-project.org/about.html>).

Dentro do ambiente integrado do *R*, podemos realizar manipulações eficientes e armazenamento de dados, contando com operadores para cálculos em matrizes, ferramentas coesas para análise de dados e recursos gráficos envolventes. Mais do que uma simples coleção de ferramentas, o *R* se apresenta como um “ambiente estatístico”, destacando-se por sua integração e forma de abordagem.

Com características de uma linguagem de programação genuína, o *R* permite que os usuários adicionem funcionalidades, definindo novas funções. Sua estrutura é amigável e propícia para extensões, inclusive permitindo a vinculação de código C, C++ e Fortran para tarefas mais complexas. Com um amplo suporte de pacotes e facilidade de expansão, o *R* não se limita a ser apenas um sistema estatístico; é um ambiente dinâmico para a implementação de diversas técnicas estatísticas modernas.

A documentação completa do *R*, apresentada de maneira semelhante ao LaTeX, garante que todos os usuários tenham recursos detalhados, tanto online quanto offline. Considerando a facilidade de extensão por meio de pacotes e a colaboração ativa da comunidade CRAN, o *R* permanece como uma ferramenta de referência no emocionante campo da computação estatística e análise de dados das mais diversas áreas.

O uso do ambiente *R*, na identificação de outliers permite que usuário realize a inspeção dos dados por meio da interpretação de gráficos e técnicas visuais, possibilitando não apenas percepção de pontos discrepantes, mas também clareza sobre ajustes necessários e nuances no processo experimental.

Nesse contexto, a escolha do *R* não é apenas pragmática; é uma aliança com uma ferramenta que transcende a análise estatística. Ao explorar visualmente os dados e detectar outliers, estamos não apenas refinando resultados, mas também contribuindo para a integridade na qualidade dos dados obtidos. Nessa trajetória de análise e interpretação, o *R* emerge como um companheiro confiável, tornando a complexidade da estatística mais acessível e a exploração de dados mais significativos.

A escolha do ambiente estatístico *R*, uma ferramenta que se destaca na manipulação eficaz de dados e oferece uma linguagem de programação intuitiva, ilustra o compromisso com uma análise transparente e de fácil compreensão. O fato de o *R* ser de livre utilização não apenas amplia seu apelo, mas também fortalece sua missão de tornar acessível a todos a capacidade de explorar dados de forma robusta e eficiente (R Project, disponível em <https://www.r-project.org/about.html>).

3 ANÁLISES E RESULTADOS

A metodologia apresentada por Montgomery (2017), sobre os objetivos na análise experimental, propõe a determinação de estatísticas iniciais dos dados, para a interpretação e, se necessário ajuste, de forma a garantir a confiabilidade do modelo de análise. Sendo assim a inspeção inicial dos dados é realizada por meio dos recursos computacionais disponibilizados no software *R* para identificação de valores de influência, tendências e distribuições no conjunto de dados.

No ambiente estatístico *R*, a inserção dos dados é realizada por meio da leitura de planilhas, as quais geram um dataframe em que serão realizadas as inspeções. Os pacotes iniciais para a construção de tais vetores não são necessários, pois já estão presentes na biblioteca mãe do software.

Para a construção dos vetores que apresentam os dados em questão, são utilizados os comandos como descritos abaixo, disponíveis também em https://github.com/AmericoHAS/Script_An-liseCultivares.

```

peso <- c(1222, 1195, 1118, 1002, 1452, 1062, 1195, 1414, 1768, 1482,
1753, 1805, 1870, 1598, 1437, 1856, 1544, 1300, 1224, 1500, 2100,2117,
2150, 1618, 2063, 2063, 1707, 1592, 850, 928, 928, 500)

cultivares <- as.factor(rep(c("Baia do Cedo","Texas Grano","Pera IPA 1", "Pera IPA 2","Pera IPA
3","Pera IPA 4","Pira Ouro","Red Creole"),each=4))

blocos <- as.factor(rep(1:4,8))
dados <- data.frame blocos, cultivares, peso)

```

A geração dos vetores se dá pela função *c*, já as funções *as.factor* e *rep* são designadas para transformação dos dados em fatores e para a repetição dos mesmos representando blocos ou cultivares. Portanto, com o comando *data.frame* os dados são compilados em uma tabela.

Outra forma possível para a geração do dataframe dentro do ambiente estatístico *R* seria a seleção de um diretório de trabalho contendo os dados salvos a partir de uma pasta de trabalho Excel, estando em formato CSV (separado por vírgulas), por exemplo, dentre outras.

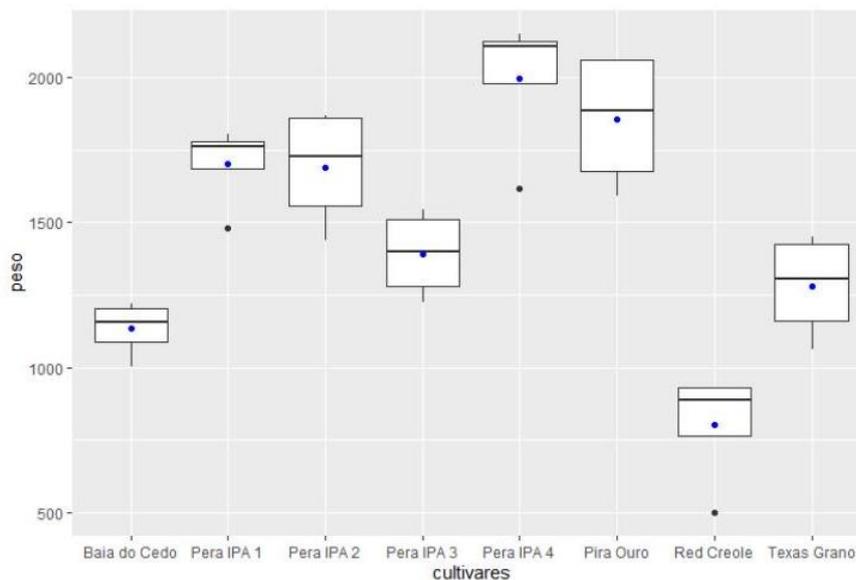
A exploração inicial do comportamento dos dados foi realizada por meio de construções gráficas e medidas descritivas.

O gráfico de boxplot nos fornece uma representação visual do comportamento dos dados, apresentando informações tais como mediana, quarts e outliers que podem influenciar

substancialmente as análises subsequentes. Para a sua construção o comando `ggplot` juntamente com os comandos `geom_boxplot` e `stat_summary` foram utilizados a partir do pacote de comandos `ggplot2`.

```
library (ggplot2)
ggplot(dados, aes(x=cultivares, y=peso)) +
geom_boxplot()+ stat_summary(fun=mean, geom = 'point', col='blue')
```

Figura 1 - Distribuição dos cultivares de cebola por peso.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma abordagem mais sofisticada na criação do gráfico de boxplot pode ser alcançada ao explorar os recursos avançados disponíveis no pacote `ggplot2`. Isso permite destacar outras informações relevantes para uma análise mais completa e detalhada.

No gráfico de boxplot podemos notar a presença de pontos azuis, que representam a média dos valores em relação aos cultivares, e a existência de pontos pretos nos indica os outliers, que podem influenciar nas análises. A presença de intervalos interquartis amplos sugere alta variabilidade dos dados para o cultivares de cebola, em que se evidencia nos genótipos de Pera IPA 2 e Pira Ouro.

Corroborando com o gráfico de boxplot (Figura 1), a elaboração de uma tabela com estatísticas relacionadas aos cultivares foi realizada evidenciando informações importantes na análise, por meio do pacote `stats`, o comando `aggregate` foi utilizado juntamente com funções de mínimo e máximo, média, desvio padrão (DP) e coeficiente de variação (CV).

Tabela 3 - Tabela de estatísticas por cultivares.

Cultivares	Mínimo	Máximo	Média	DP	CV%
Baia do Cedo	1002	1222	1134,25	98,56	8,68
Pera IPA 1	1482	1805	1702,00	148,28	8,71
Pera IPA 2	1437	1870	1690,25	210,10	12,43
Pera IPA 3	1224	1544	1392,00	154,33	11,08
Pera IPA 4	1618	2150	1996,25	253,01	12,67
Pira Ouro	1592	2063	1856,25	243,30	13,10
Red Creole	500	928	801,50	204,33	25,49
Texas Grano	1062	1452	1280,75	184,64	14,41

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observando-se a Tabela 3 e a Figura 1 os cultivares de Pera IPA 4 e Red Creole apresentam maior e menor peso (g) para os bulbos, respectivamente, condizentes com médias de 1996,25 g e 801,50 g. O desvio padrão dos genótipos indicam a dispersão dos dados em relação à média, em que é possível observar, para o genótipo Pera IPA 4 de maior desvio padrão, podendo estar relacionado ao outlier apresentado no gráfico de boxplot (Figura 1), entretanto, a maior variabilidade dos dados, em relação a média se deu ao cultivar Red Creole (CV% = 25,49%).

Com o intuito de verificar se os dados apresentam uma distribuição homogênea o teste de bartlett.test foi realizado, permitindo verificar a variabilidade dos dados, que a um nível de 5% de significância para o valor-p não rejeitamos H_0 , indicando que os dados apresentam uma distribuição homogênea.

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \dots = \sigma_8^2.$$

$$H_1: \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$$

O comando realiza a avaliação da homogeneidade dos dados relacionado o peso a cada cultivar de cebola, apresentando a saída no R como segue:

```
bartlett.test(peso ~ cultivares)
data: peso by cultivares
Bartlett's K-squared = 3,0339, df = 7, p-value = 0,8818
```

Podemos destacar nesta análise valor-p bem maior que 5% de significância, indicando a homogeneidade de variâncias, mas que a presença dos outliers pode influenciar na interpretação dos dados. A elaboração de um modelo apropriado para a experimentação de

dados e a validação por meio de testes e análises gráficas são essenciais para ratificar as informações inicialmente levantadas. O modelo inicialmente proposto é uma análise de variância (ANOVA), uma abordagem estatística voltada para a investigação da influência de variáveis distintas na variação de um experimento.

Em essência, a ANOVA decompõe a variação total e seus graus de liberdade em componentes atribuídos a fatores controlados (os tratamentos) e a uma porção chamada resíduo, relacionada a fatores não controlados. Os graus de liberdade são definidos como o número de observações menos o número de parâmetros estimados. A soma de quadrados é uma medida da dispersão dos dados, e o quadrado médio representa a razão entre a soma de quadrados e os graus de liberdade.

A realização da análise de variância dos dados é executada por meio das funções `aov` e `anova`, em que se estabelece uma relação entre as variáveis. A construção do modelo no *R* permite analisar a influência das variáveis “cultivares” e “blocos” ao “peso” dos cultivares, conforme indicado:

```
M1 <- aov (peso ~ cultivares + blocos, data = dados)
anova (M1)
```

Tabela 4 – Análise de variância para o modelo M1

	GL	SQ	QM	Valor-F	Valor-p
Cultivares	7	4515580	645083	19,0498	0,0001
Blocos	3	185070	61690		
Resíduos	21	711123	33863		

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Tabela 4, é possível concluir que ao considerarmos o valor-p ao nível de 5% de significância, pelo menos um dos cultivares difere em produtividade das demais por apresentar um valor-p 0,0001. Sendo assim, existe diferença significativa no rendimento dos genótipos.

A partir do modelo adotado, a análise dos pressupostos é uma etapa muito importante por garantir a adequação do modelo aos dados analisados. Sendo assim, a normalidade dos resíduos é verificada para que essa adequação seja garantida.

O teste de normalidade dos resíduos é realizado por meio do teste de Shapiro-Wilk, já presente na biblioteca do *R*, executado por meio da função `shapiro.test`. Para garantir que a normalidade dos resíduos esteja presente no modelo adotado, devemos considerar duas hipóteses, sendo:

H_0 : os resíduos seguem uma distribuição normal.

H_1 : os resíduos não seguem uma distribuição normal.

```
shapiro.test (M1$residuals)
```

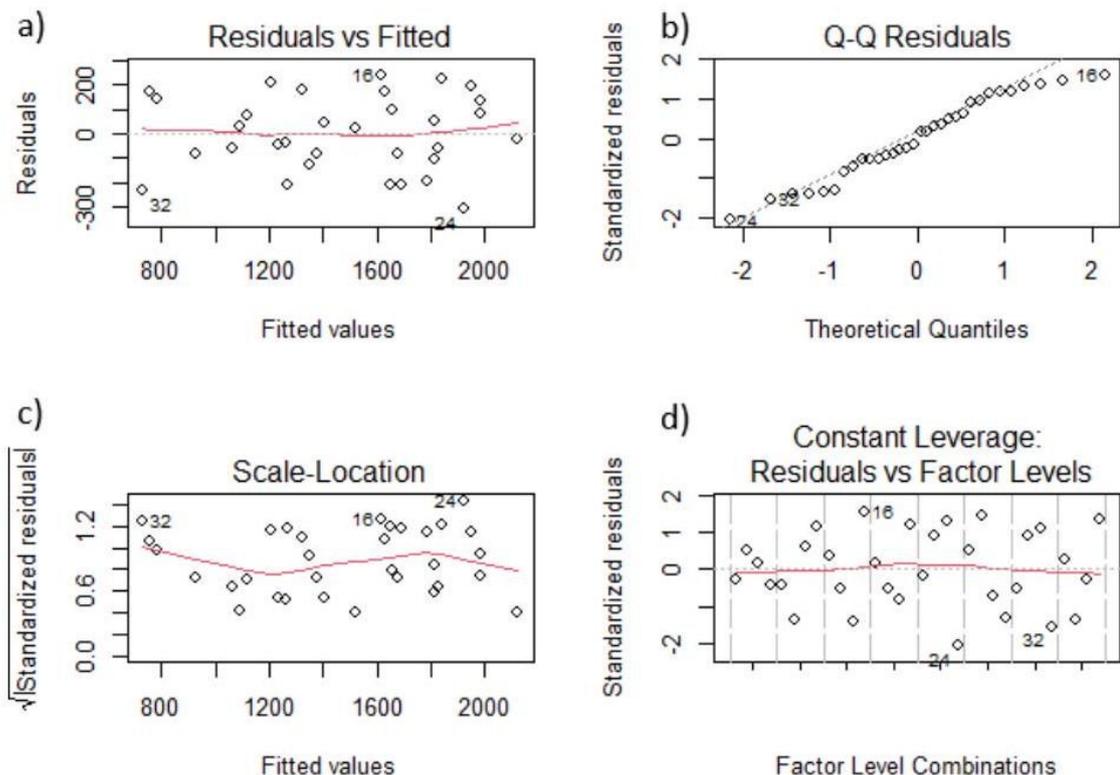
Ao considerarmos um nível de significância de 5%, com um valor-p resultante da análise é de 0,2598 não rejeitamos a hipótese H_0 logo os resíduos do modelo adotado seguem uma distribuição normal.

Ao examinar os resíduos, é possível identificar padrões sistemáticos, violações dos pressupostos do modelo e outros comportamentos indesejáveis. A figura 2 apresenta exemplos de gráficos frequentemente empregados nesse processo de diagnóstico.

Esses gráficos são fornecidos pela função plot presente na biblioteca do software, a visualização gráfica é ajustada, por meio da função par(mfrow=c(2,2)), oferecendo a conveniência de organizar vários gráficos no mesmo espaço de plotagem.

```
par (mfrow = c(2,2))
plot (M1)
```

Figura 2 - Análise gráfica dos resíduos do modelo M1.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 2a *Residual vs Fitted* é apresentado os resíduos vs. os valores ajustados, seguindo uma distribuição aleatória, indicando uma independência dos erros. É possível notar alguns pontos que podem estar influenciando as análises. Já na Figura 2b gráfico *Q – Q Residuals*, avalia se os resíduos seguem uma distribuição normal, a proximidade da maioria dos pontos à reta gerada indica normalidade. A análise deste gráfico corrobora com o resultado do teste de Shapiro-Wilk realizado anteriormente.

O gráfico *Scale-Location* (Figura 2c) apresenta a raiz quadrada dos resíduos padronizados comparada com os valores ajustados, indicando homogeneidade de variância. O último gráfico *Constant Leverage* (Figura 2d) apresenta os resíduos padronizados em função dos níveis de fatores, distribuídos de forma aleatória.

Nos modelos mistos, os efeitos de variância são incorporados à parte aleatória, representando um componente adicional de variância. Em contraste, nos modelos de efeitos fixos, esses efeitos são tratados como parte esperada ou sistemática do modelo. Além disso, nos modelos mistos, as observações dentro do mesmo talhão não são consideradas independentes; permite-se alguma correlação entre elas. Essa transição ilustra uma mudança fundamental ao passar de modelos de regressão/ANOVA padrão para modelos mistos.

Após selecionar aleatoriamente quatro canteiros dentre os vinte analisados, obtivemos uma amostra representativa, sugerindo que o efeito do canteiro é aleatório. Ao considerarmos os blocos como tendo efeito aleatório, podemos implementar um modelo que incorpora efeitos mistos utilizando o pacote nlme e a função lme para ajustar os dados. O resumo do modelo é apresentado na Tabela 5.

```
M2 <- lme(peso ~ cultivares, data = dados, random = ~ 1 | blocos, method
="REML")
summary (M2)
```

Tabela 5 - Estimativas dos parâmetros fixos para o modelo M2.

Cultivares	Estimativas	Erro padrão	G.L.	Valor-p
Intercepto	1134,25	96,61957	21	0,0000
Pera IPA 1	566,50	130,12111	21	0,0003
Pera IPA 2	578,25	130,12111	21	0,0003
Pera IPA 3	876,50	130,12111	21	0,0609
Pera IPA 4	272,25	130,12111	21	0,0000
Pira Ouro	412,25	130,12111	21	0,0000
Red Creole	1467,00	130,12111	21	0,0184

Cultivares	Estimativas	Erro padrão	G.L.	Valor-p
Texas Grano	987,75	130,12111	21	0,2729

Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao considerar o cultivar Baia do Cedo como baseline e comparando-o com os demais podemos notar uma diferença significativa com os cultivares de Pera IPA 1, Pera IPA 2, Pera IPA 4, Pera Ouro e Red Creole ao nível de 5% de significância. As estimativas para os fatores de efeito aleatório no modelo foram $G = 58,97761^2 I_{(1)}$ e $R = 184,019^2 I_{(32)}$ respectivamente. Essas representam a variabilidade dos dados explicada pelos efeitos aleatórios e o erro aleatório.

Por apresentar diferenças significativas entre os cultivares analisados, o teste de ScottKnott foi realizado, a fim de identificar as diferenças existentes entre os cultivares.

O teste Scott-Knott é uma abordagem estatística para agrupar médias após testes de comparação múltipla. Ele ordena as médias, divide em subgrupos com base em diferenças significativas e avalia a homogeneidade, resultando na formação de grupos identificados por letras. A Tabela 6 apresenta os grupos formados por meio das diferenças significativas ao nível de 5%, para realização do teste a função *SK* foi executado por meio do pacote ScottKott, os valores obtidos são apresentados na Tabela 6.

```
sk1 <- SK (M2, which='cultivares')
summary (sk1)
```

Tabela 6 - Teste de comparações de Scott-Knott (5%).

Cultivare	Médias	
Pera IPA 4	1996.25	a
Pera Ouro	1856.25	a
Pera IPA 1	1702.00	a
Pera IPA 2	1690.25	a
Pera IPA 3	1392.00	b
Texas Grano	1280.75	b
Baia do Cedo	1134.25	b
Red Creole	801.50	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos notar que o cultivar Red Creole difere significativamente dos demais, enquanto os cultivares identificados com a letra *a*, não diferem entre si, mas diferem dos

demais, bem como os cultivares identificados com a letra *b* diferem dos cultivares identificados com as letras *a* e *c*, mas não diferem entre si.

Considerando os dois modelos propostos para a análise dos dados, a comparação entre os ajustes é conduzida através da execução da função `anova` para o modelo que incorpora efeitos mistos, disponível na biblioteca do *R*. Os resultados são detalhados na Tabela 7, abaixo.

```
anova(M2)
```

Tabela 7 - Análise de variância para o modelo M2

	numGL	denGL	Valor-F	Valor-p
Intercepto	1	21	1138,7569	0,0001
Cultivares	7	21	19,0498	0,0001

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se que, para o fator cultivares, em ambas as ANOVAs, o valor de *F* é 19,0498 para uma distribuição $F(7,21)$, resultando em um valor-p 0,0001. Além disso, é evidente que o valor de σ^2 ($184,019^2$) dos resíduos no modelo que considerou efeitos aleatórios é equivalente à soma de quadrados dos resíduos apresentada na análise de variância (tabela 3) do modelo M1.

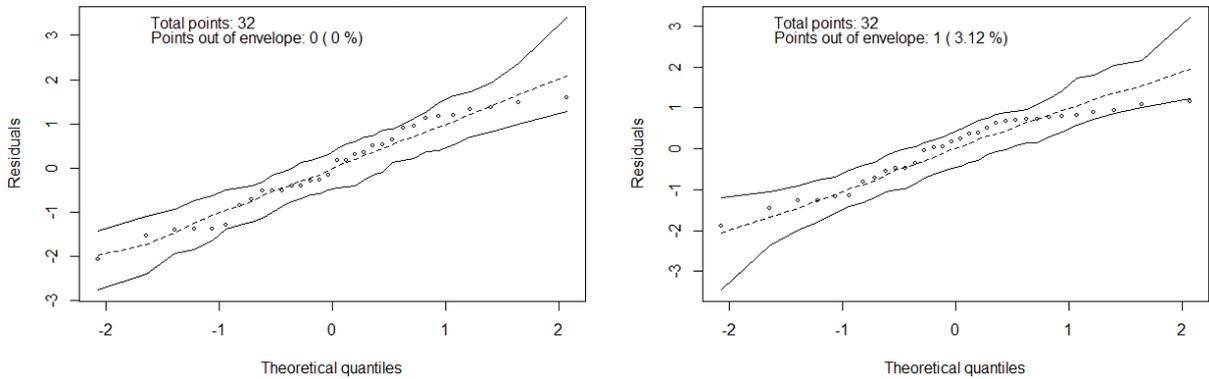
A verificação da adequação dos modelos aos dados pode ser realizada por meio de inspeção gráfica. Observando-se o gráfico de quantis normais com envelope simulado, constatou-se que eles apresentam uma distribuição dos resíduos dentro da borda de confiança, sugerindo a qualidade de ajuste dos modelos aos dados dos cultivares de cebola. Similar ao gráfico *Q – Q Residuals* (Figura 2b), esse gráfico apresenta uma borda de confiança em que podemos observar tendências dos dados e possíveis outliers de forma mais eficaz. Presente no pacote `hnp`, o comando `hnp` permite a geração gráfica, para o modelo que considera efeitos fixos (M1) e para o modelo que considera efeitos aleatórios.

```
par(mfrow = c(1, 2))
```

```
hnp(rstandard(M1), halfnormal = F)
```

```
hnp(resid(M2, type = "p"), halfnormal = F)
```

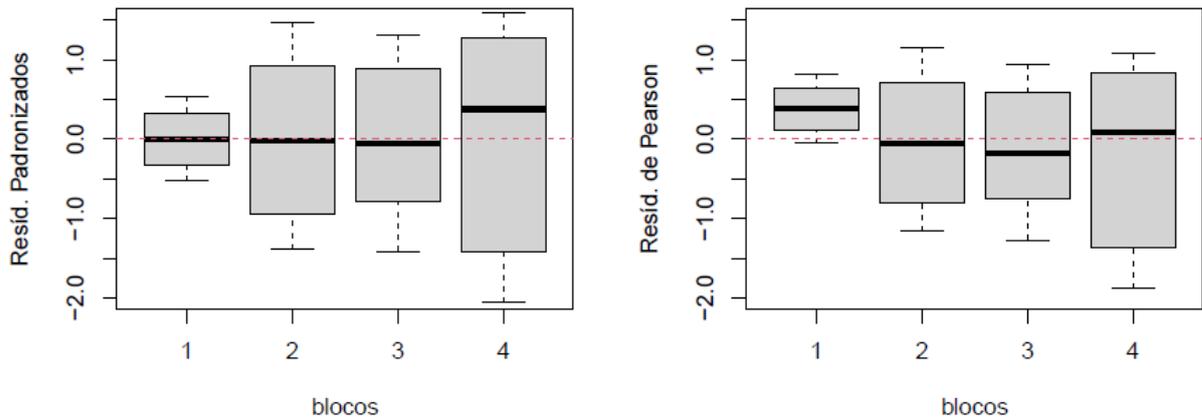
Figura 3 - Gráfico de quantis normais com envelope simulado dos modelos M1 e M2.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A comparação entre os gráficos gerados pelos modelos utilizados na análise dos dados, embora aparentemente semelhantes à primeira vista, revela diferenças residuais. A heterogeneidade na variância residual por blocos torna-se evidente a partir da construção dos gráficos de boxplot.

Figura 4 - Gráficos de resíduos por blocos para os ajustes M1 e M2, respectivamente



Fonte: Elaborada pelo autor.

O próximo passo envolve a consideração de um modelo que leve em conta a heterogeneidade da variância residual, indicando que não há um único valor para σ^2 . Nesse sentido, é incluída uma variável auxiliar no banco de dados para agrupar os blocos 1 e 3 como t_1 , e os blocos 2 e 4 como t_2 . Essa abordagem altera o ajuste da seguinte maneira:

```
dados <- transform(dados, bl=ifelse(blocos=="1" | blocos=="3", "t1", "t2"))
```

Após a modificação dos dados, o ajuste do modelo, considerando a heterogeneidade de resíduos, é descrito como segue:

```
M3 <- lme(peso ~ cultivares, random = list(blocos=pdIdent(~1)),
weight= varIdent(form=~1|bl), data = dados)
summary (M3)
```

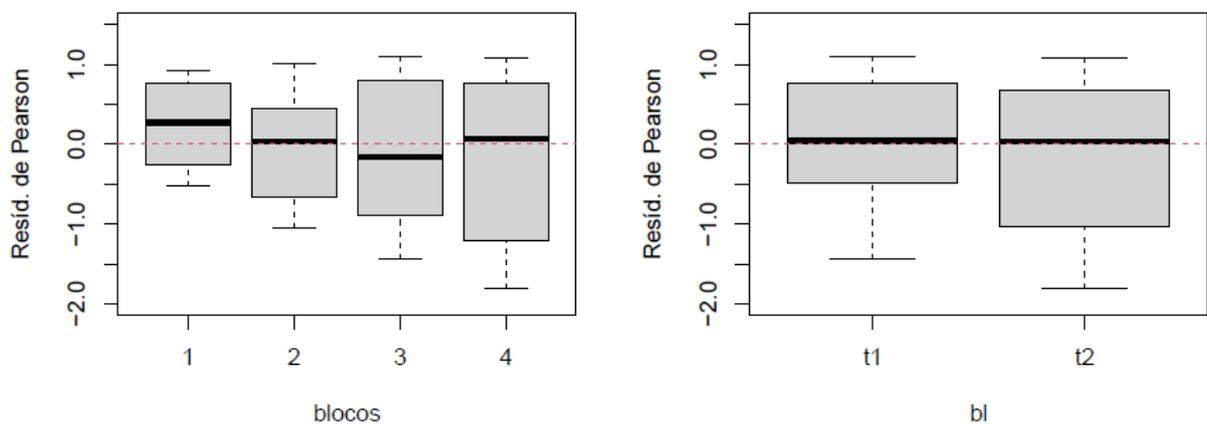
Parte do *summary* resultante do modelo, destacando as estimativas dos efeitos aleatórios e dos parâmetros $t1$ e $t2$ é apresentado. Esses valores são fundamentais para compreender o impacto dos fatores aleatórios e das variações nos dados analisados.

```
Random effects:
Formula: ~1 | blocos
(Intercept) Residual
StdDev: 76.38383 129.983

Variance function:
Structure: Different standard deviations per stratum
Formula: ~1 | bl
Parameter estimates:
t1      t2
1.000000 1.649392
```

Observe que agora temos $\hat{\sigma}_u^2 = 76,38383$ e a variância residual foi dividida em duas partes para os grupos $t1$ e $t2$. Ou seja, $\hat{\sigma}_{t1}^2 = 1302$ e $\hat{\sigma}_{t2}^2 = (129,983 \times 1,649)^2$. Essa subdivisão nos fornece uma compreensão mais detalhada da variação nos dados, permitindo uma análise mais precisa e específica de cada grupo. Na Figura 5, em comparação com a Figura 4, é evidente uma melhoria na dispersão dos resíduos em relação à homogeneidade.

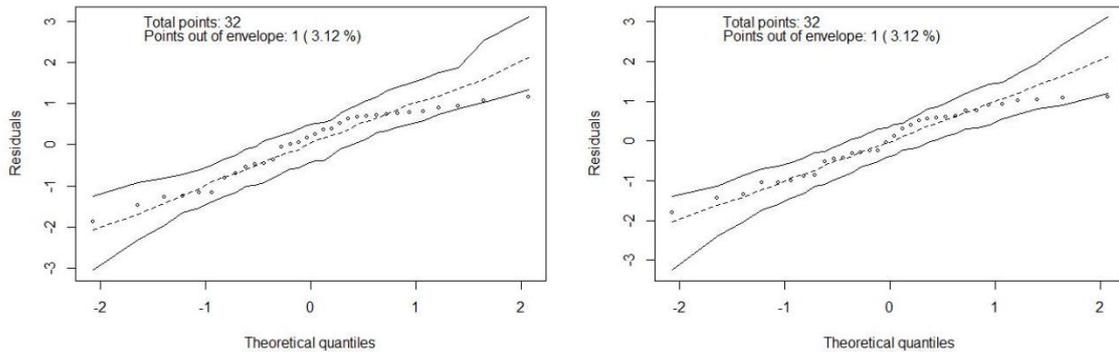
Figura 5 - Gráficos de resíduos por blocos e grupos de blocos para o ajuste M3.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os gráficos dos envelopes simulados para os ajustes M2 e M3, exibidos na Figura 6, revelam maior linearidade dos resíduos em torno da linha mediana, indicando uma melhoria significativa no ajuste dos modelos. Essa distribuição mais uniforme dos resíduos sugere uma melhor adaptação dos modelos M2 e M3 aos dados, aumentando a confiabilidade de suas estimativas e previsões.

Figura 6 - Gráficos de envelope simulado para os ajustes M2 e M3, respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados obtidos com os modelos M2 e M3 destacam sua maior adequação aos dados. A análise dos envelopes simulados evidencia uma tendência mais linear dos resíduos em relação à linha mediana, o que sugere uma melhor captura da estrutura subjacente dos dados. Essas descobertas reforçam a utilidade e a robustez dos modelos desenvolvidos para análise.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A estatística experimental desempenha um papel crucial na análise de diversos tipos de dados, possibilitando a interpretação clara dos resultados experimentais para orientar decisões significativas em pesquisas.

A implementação em um software facilita e confere confiabilidade às análises, sendo notável a praticidade proporcionada por essa abordagem. A utilização de diversos pacotes no ambiente estatístico *R* amplia as possibilidades de análises, incluindo testes e etapas fundamentais da estatística experimental, conforme evidenciado na análise dos dados da literatura escolhida como exemplo.

Esses recursos resultaram na identificação de outliers nos dados, bem como na determinação do modelo mais apropriado, revelando, por exemplo, que o cultivar Red Creole apresentou a menor média nos pesos dos bulbos, e se mostrou significativamente diferente dos demais cultivares, como indicado pela análise de Scott-Knott e pelo modelo que considerou efeitos aleatórios. Em contrapartida, o cultivar Pera IPA 1 demonstrou maior produtividade.

A análise dos pressupostos dos modelos foi realizada no ambiente estatístico *R*, oferecendo versatilidade e facilidade na interpretação dos dados por meio de suas funcionalidades e pacotes. Foram empregados gráficos de dispersão, que possibilitaram uma visualização clara do comportamento dos dados em relação aos modelos construídos. Além disso, foram utilizados gráficos Q-Q (quantil-quantil) para validar os testes, proporcionando uma análise visual adicional da adequação dos resíduos à distribuição normal.

A abordagem apresentada proporcionou condições para a utilização eficaz do software *R*, tornando possível a exploração dos dados e a identificação do cultivar mais produtivo, alinhando-se aos interesses do pesquisador. Diversas áreas de pesquisa podem ser amplamente beneficiadas ao utilizarmos pacotes e rotinas implementadas no ambiente estatístico *R* (R Development Core Team, 2023).

REFERÊNCIAS

MONTGOMERY, D. C. **Design and analysis of experiments**. 9. ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2017.

NOGUEIRA, M. C. S. **Experimentação agrônômica I: conceitos, planejamento e análise estatística**. 1. ed. Piracicaba: M. C. S. Nogueira, 2007.

PINHEIRO, J. C.; BATES, D. M. **Mixed-effects models in S and S-PLUS**. New York: Springer-Verlag, 2000.

R CORE TEAM. **R: a language and environment for statistical computing**. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2023. Disponível em: <http://www.R-project.org/>.

R PROJECT. **O que é R?** Disponível em: <https://www.r-project.org/about.html>. Acesso em: 23 nov. 2023.

WEST, Brady T.; WELCH, Kathleen B.; GALECKI, Andrzej T. **Random coefficient models for longitudinal data: the autism example**. Linear mixed models: a practical guide using statistical software. 2. ed. New York: CRC Press, Taylor & Francis, 2014.

YAMANOUCHI, T. K. **Seleção de modelos lineares mistos utilizando critérios de informação**. 2017. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2017.

CAPÍTULO X

O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON E APLICAÇÕES NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

DOI: 10.51859/ampla.epm963.1125-10

Luiz Fernando de Lima da Silva
nandinhodte10@hotmail.com

Marcos Vinicius de Oliveira Peres
marcos.peres@ies.unespar.edu.br

Valter Soares de Camargo
valter.camargo@unespar.edu.br

Rafael Mestrinheire Hungaro
rafaelhungaro@hotmail.com

RESUMO

O trabalho aborda a aplicação do Método de Newton-Raphson na resolução de equações não lineares, destacando sua relevância histórica e versatilidade em campos como engenharia, ciência da computação, economia e física. O método é apresentado como uma ferramenta numérica eficiente, cuja fundamentação matemática é explorada por meio da dedução com série de Taylor e abordagem geométrica. Um algoritmo em linguagem R é fornecido para implementação prática, destacando aplicações específicas na engenharia, como otimização do ciclo Diesel, determinação da profundidade crítica de canais trapezoidais e modelagem de cabos catenários. O estudo destaca resultados numéricos e discute limitações do método, incluindo convergência lenta, falha em raízes múltiplas e sensibilidade à escolha do ponto inicial. Em suma, o artigo oferece uma visão abrangente do Método de Newton-Raphson, desde sua base matemática até suas aplicações práticas, evidenciando sua importância na resolução de problemas complexos relacionados a equações não lineares na engenharia.

Palavras-chave: Método de Newton-Raphson, Equações não lineares, Aplicações em engenharia.

1 INTRODUÇÃO

Diversos problemas do dia a dia, que variam desde calcular a economia ao comprar um simples pão até realizar previsões complexas na Bolsa de Valores, podem ser resolvidos através da análise de funções matemáticas. Em muitos desses problemas, a solução envolve encontrar os pontos que são as raízes dessas funções, isto é, os valores em que essas funções se anulam.

Os esforços para alcançar essas soluções remontam à antiga Babilônia, onde matemáticos e filósofos já eram capazes de calcular as raízes exatas de polinômios de até segundo grau. Hoje em dia, qualquer estudante de ensino médio pode usar o método de Bhaskara para encontrar essas raízes. Segundo Queiroz (2013), a situação se torna mais complicada quando lidamos com polinômios de graus maiores, em especial aqueles que possuem grau igual ou superior a 5. O matemático Abel, por exemplo, demonstrou que não existe uma fórmula algébrica geral para calcular as raízes exatas de tais polinômios. Existem métodos específicos para polinômios de grau 3 e 4, conhecidos como os métodos de Cardano e Ferrari, respectivamente.

Dado o desafio de expressar analiticamente as raízes de funções matemáticas mais complexas, surgiu a necessidade de desenvolver métodos para obter aproximações precisas dessas raízes. Um dos métodos mais famosos é o método de Newton-Raphson. Este método se destaca não apenas por fornecer uma aproximação das raízes, mas também por sua eficiência numérica e computacional.

O Método de Newton-Raphson é uma técnica numérica fundamental amplamente utilizada em diversas áreas, desde matemática aplicada e pura até engenharia, física, economia e ciência da computação. O método, embora tenha sido desenvolvido no século XVII, continua a ser uma ferramenta importante entre os métodos numéricos, em especial devido ao avanço da computação na segunda metade do século XX, e é frequentemente utilizado em algoritmos para resolver equações não lineares, fundamentais para a resolução de uma ampla gama de problemas.

Neste trabalho, serão desenvolvidos em detalhes os conceitos matemáticos associados ao Método de Newton-Raphson, os contextos históricos serão considerados e um algoritmo no Software R será desenvolvido para a aplicação dos métodos em alguns problemas que envolvem a solução de equações não lineares. Os resultados das aplicações serão discutidos e os códigos utilizados disponibilizados no GitHub.

2 MATERIAIS E MÉTODOS

Antes de destrinchar o método de Newton-Raphson, faremos uma breve conceituação histórica desse método tão importante.

2.1 Breve contexto histórico

O Método de Newton-Raphson, frequentemente referido como Método de Newton, é uma técnica matemática revolucionária que tem sido uma pedra angular na resolução de equações não lineares e na otimização de funções complexas. Sua história remonta ao final do século XVII e início do século XVIII, período de efervescência científica e matemática na Europa. Neste texto, exploraremos detalhadamente o contexto histórico que levou à criação e desenvolvimento deste método, bem como seu impacto duradouro nas ciências.

De acordo com Boyer e Merzbach (2019), para compreender o Método de Newton-Raphson, é crucial mergulhar no cenário intelectual da época em que foi concebido. No final do século XVII, a matemática estava em plena efervescência. Grandes mentes como Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz estavam desenvolvendo o cálculo diferencial e integral, uma revolução que mudaria a maneira como entendemos o mundo físico e os processos matemáticos. No entanto, uma questão persistia: como encontrar as raízes das equações de forma eficiente e precisa?

Naquela época, os métodos disponíveis eram limitados. Os métodos gráficos eram imprecisos para funções complexas, e as soluções analíticas eram impossíveis de ser obtidas para muitos problemas. Foi nesse contexto que o Método de Newton-Raphson começou a se desenvolver. Isaac Newton, um dos maiores cientistas da história, fez contribuições extraordinárias para a matemática, física e astronomia. Sua obra monumental, “*Philosophice Naturalis Principia Mathematica*” (ou simplesmente “Principia”), publicada em 1687, revolucionou nossa compreensão da física, descrevendo as leis do movimento e a lei da gravitação universal. Newton também estava interessado em problemas matemáticos e, durante o desenvolvimento do cálculo, ele começou a trabalhar em técnicas para resolver equações.

Embora não tenha publicado formalmente o método, suas anotações pessoais revelaram seu conhecimento da abordagem que se tornaria o Método de Newton-Raphson. Ele usava métodos semelhantes para encontrar raízes de funções em suas investigações sobre óptica. O nome de Joseph Raphson está ligado ao Método, visto que em 1690, ele publicou “*Analysis aequationum universalis*”, onde apresentou uma versão primitiva do método que leva seu nome. Raphson, matemático e atuário inglês, formalizou e popularizou a técnica (Amaral; Souza; Catalan, 2015).

A fórmula central do método, que até hoje é conhecida como a iteração de Newton-Raphson, é uma generalização da abordagem de Newton e Raphson. O Método de Newton-Raphson provou ser uma abordagem incrivelmente poderosa para encontrar raízes de funções. Sua natureza iterativa permite que ele se aproxime rapidamente de soluções precisas, tornando-o uma ferramenta valiosa em uma variedade de campos, desde a engenharia até a física teórica. Uma das características mais notáveis do método é sua capacidade de convergência rápida para a solução correta, desde que uma estimativa inicial razoável seja fornecida. No entanto, é importante notar que o método não é imune a problemas, como a convergência para mínimos locais em vez de raízes globais, e a necessidade de calcular a derivada da função.

O Método de Newton-Raphson se tornou uma das técnicas mais amplamente utilizadas em matemática aplicada e ciência computacional. Ele é fundamental na otimização de funções complexas, resolução de sistemas de equações não lineares e modelagem matemática de fenômenos naturais. Ao longo dos séculos, o método foi refinado e adaptado para atender às necessidades da matemática moderna e da computação. Sua versatilidade e eficácia o tornam uma ferramenta indispensável em uma ampla gama de disciplinas científicas e de engenharia.

Em resumo, o Método de Newton-Raphson é um testemunho da capacidade humana de inovação matemática e científica. Desenvolvido em um contexto histórico rico em avanços intelectuais, ele continua sendo uma ferramenta essencial para a resolução de problemas complexos em muitas áreas da ciência e da tecnologia. Sua importância transcende o tempo, proporcionando soluções valiosas que continuam a impulsionar o progresso científico e tecnológico até os dias atuais.

2.2 Dedução do Método de Newton-Raphson

Há diversas maneiras de realizar a dedução do Método de Newton-Raphson. Contudo, neste trabalho consideraremos uma dedução por meio da série de Taylor e outra dedução geométrica.

2.2.1 Dedução por série de Taylor

Uma forma bem conhecida de deduzir o método de Newton-Raphson é por meio de uma expansão em série de Taylor. Para isso, dada uma função f contínua em um intervalo $[a, b]$, com primeiras derivadas também contínuas no intervalo $[a, b]$ e $x_0 \in [a, b]$, sendo x_0 uma aproximação de x^* onde $f(x^*) = 0$, de modo que a distância de x_0 e x^* seja "pequeno", isto é, $|x^* - x_0|$ é próximo de 0. O polinômio de Taylor para f , expandido até a segunda derivada em torno de x_0 , é dado por

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(\xi) \frac{(x - x_0)^2}{2}, \quad (1)$$

onde ξ está entre x e x_0 . Fazendo a substituição de $x = x^*$ e $f(x^*) = 0$ na equação acima, obtemos,

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) + f''(\xi) \frac{(x^* - x_0)^2}{2}.$$

Note que, $|x_0 - x^*|$ é "pequeno", então $(x_0 - x^*)^2$ será "muito pequeno" em comparação com o restante da equação, então truncando a série, temos que,

$$0 \approx f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0)$$

Agora, manipulando algebricamente para isolar x^* , obteremos,

$$x^* \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Considerando esse primeiro valor de x^* como nosso primeiro valor aproximado (x_1) para a raiz de $f(x)$, é possível repetir o processo anterior repetidas vezes,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ &\vdots \\ x_{i+1} &= x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}. \end{aligned}$$

Dessa forma, temos a fórmula iterativa de Newton-Raphson. Portanto, resolver $f(x^*) = 0$ pelo método de Newton-Raphson, é realizar iterações com

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (2)$$

a partir de um valor aproximado x_0 (chute inicial) e assim obter aproximações sucessivas de x^* . Cada operação para obter um novo valor de x_{i+1} é chamado de iteração.

O teorema a seguir, demonstra que, se a sequência (x_n) definida pela expressão (2), converge para um número x^* do domínio de f , então $f(x^*) = 0$, ou seja, x^* é, de fato, uma raiz da função f (Sossolote, 2021).

Teorema 1. Suponha-se que f é derivável no intervalo $[a, b]$, com $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Se $x_i \rightarrow x^*$ tal que $x^* \in [a, b]$ e x_i é dada pela expressão (2), então $f(x^*) = 0$.

Demonstração. Tome,

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Aplicando limite de ambos os lados, temos,

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} x_{i+1} = \lim_{i \rightarrow +\infty} x_i - \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Como f é derivável e $f'(x) = 0$ em $[a, b]$,

$$x^* = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}$$

Rearranjando a equação acima, segue que $f(x^*) = 0$.

2.2.2 Dedução geométrica

Uma interpretação geométrica desse método envolve traçar a reta tangente ao gráfico de f em x_0 e definir x_1 como o ponto em que essa reta intersecta o eixo das abscissas. Repetindo esse processo indutivamente, quando possível, obtemos a sequência de pontos mencionada anteriormente. Veja a Figura 1, para calcular x_1 em função de x_0 , sabendo que x_1 será o intercepto no eixo x da reta tangente à curva, originada por x_0 . Considerando a equação geral de reta que passa por (x_0, y_0) com inclinação m dada por,

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

A equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, f(x_0))$ tem inclinação $m = f'(x_0)$ e é dada por,

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Sabendo que essa reta tangente passa por $(x_1, 0)$, temos que,

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

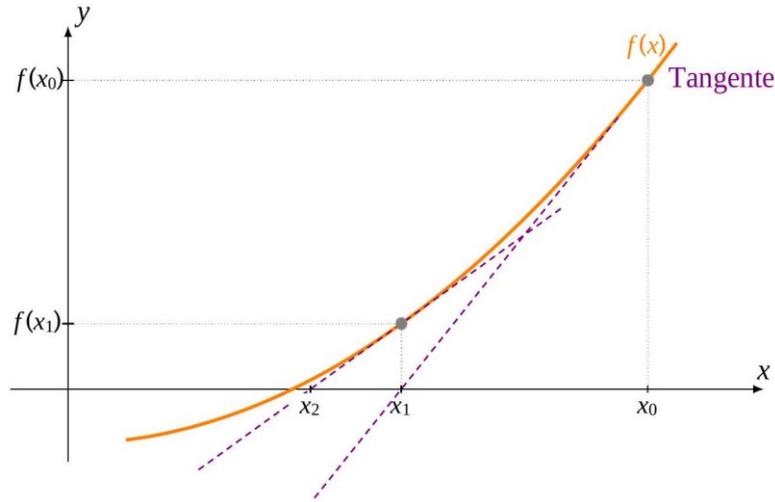
Dessa forma, reescrevendo a expressão acima, obtemos,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Esse processo pode ser repetido intuitivamente, para $x_1, x_2, \dots, i, i + 1$. De modo geral, temos:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Figura 1 - Interpretação geométrica do método de Newton-Raphson.



Fonte: Elaborada pelos autores

2.3 Erro e critério de parada do método de Newton-Raphson

Segundo Chapra e Canale (2011), a série de Taylor também pode ser usada para fazer uma estimativa do erro da fórmula, o que se percebe ao notar que, se a série de Taylor completa fosse usada, seria obtido um resultado exato. Nessa situação, x^* , na qual x^* é o valor verdadeiro da raiz. Substituindo esse valor junto com $f(x^*) = 0$ na Equação (1) expandida em torno dos valores x_i , obtém-se,

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x^* - x_i) + f''(\xi) \frac{(x^* - x_i)^2}{2} \quad (3)$$

Da equação (2), podemos escrever,

$$f(x_i) = f'(x_i)(x_i - x_{i+1}) \quad (4)$$

A equação (4) pode ser subtraída da equação (3), obtendo,

$$0 = f'(x_i)(x^* - x_{i+1}) + f''(\xi) \frac{(x^* - x_i)^2}{2} \quad (5)$$

Note que, o erro é igual à diferença entre x_{i+1} e a verdadeira raiz x^* , como escrita em,

$$E_{i+1} = x^* - x_{i+1}$$

Então, a equação (5) pode ser expressa por,

$$0 = f'(x_i)E_i + \frac{f''(\xi)}{2} E_i^2 \quad (6)$$

Considerando que o método vai convergir para a verdadeira raiz, então, x_i e ξ irão gradualmente se aproximar da raiz x^* e assim, equação (6) pode ser reescrita como,

$$E_{i+1} = \frac{-f''(x^*)}{2f'(x^*)} E_i^2$$

Portanto, de acordo com a equação acima, o erro atual é aproximadamente proporcional ao quadrado do erro anterior. Isso implica que a precisão das casas decimais aproximadamente irá dobrar a cada iteração. Esse padrão de comportamento é chamado de convergência quadrática.

É essencial observar que a convergência local do Método de Newton-Raphson é condicionada à continuidade e diferenciabilidade da função, bem como à escolha adequada da estimativa inicial. A condição $f'(c_n) \neq 0$ é também crucial para garantir a convergência. Em Burden, Faires e Burden (2015), a convergência é explorada em profundidade, proporcionando perspectivas valiosas sobre os requisitos e nuances envolvidos no processo.

Apesar da eficiência do método e da convergência para a raiz da função, não é viável a realização de um número muito grande de iterações. Para evitar iterações infinitas, é necessário estabelecer critérios de parada. Dentro desses critérios, podemos incluir um limitante para o número máximo de iterações ou utilizar alguma medida de erro para as estimativas. Nesse trabalho, utilizaremos como critério de parada uma tolerância para o erro relativo entre as iterações. Como não sabemos o verdadeiro valor para a raiz da função procurada, e levando em conta que o método converge para esse verdadeiro valor, podemos assumir como medida para o erro relativo, a seguinte relação,

$$\varepsilon_r = \left| \frac{\text{valor atual} - \text{valor anterior}}{\text{valor atual}} \right|,$$

ou em outra notação,

$$\varepsilon_r = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right|. \quad (7)$$

2.4 Quando o método de Newton-Raphson não é eficiente

O método de Newton-Raphson, embora seja amplamente utilizado e considerado eficaz na resolução de equações não lineares, enfrenta algumas limitações em determinadas circunstâncias específicas. As principais adversidades que o método de Newton-Raphson pode enfrentar, destacados por Chapra e Canale (2011) são:

1. **Ponto de inflexão:** esse caso é ilustrado na Figura 2a descreve o caso no qual ocorre um ponto de inflexão, [isto é, $f''(x) = 0$] na vizinhança de uma raiz. Se a função possui um ponto de inflexão próximo ou dentro da região de interesse, isso pode causar oscilações no método de Newton-Raphson, dificultando a convergência para a raiz correta. A presença de mudanças abruptas na curvatura da função pode “confundir” o

algoritmo, levando a soluções imprecisas ou à não convergência. Esses pontos de inflexão podem dificultar a convergência do método devido às oscilações na curvatura da função, prejudicando a aproximação da raiz desejada.

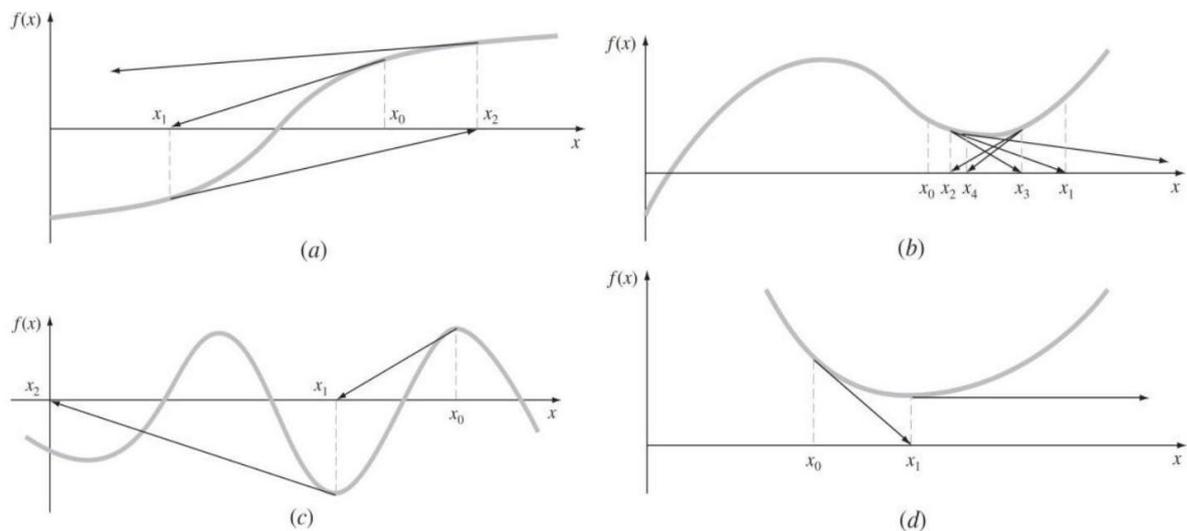
2. **Pontos de máximos e mínimos:** a presença de um ponto de máximo ou mínimo pode fazer com que o método fique “preso” nessa região, tornando difícil ou impossível convergir para a raiz desejada. Isso acontece porque, na vizinhança do ponto de máximos e mínimos, há sinal de $f'(x)$ fica variando de sinal. A Figura 2b ilustra essa tendência da técnica de Newton-Raphson em oscilar em torno de uma posição de máximo ou de mínimo. Veja ainda que, quando atingida uma inclinação próxima a zero, a solução dispara horizontalmente e nunca atinge o eixo x , isso é, a solução é mandada para longe da área de interesse (Figura 2d). Além disso, o método de Newton-Raphson quando encontra um ponto de máximo ou mínimo, temos $f'(x) = 0$, resultando em um problema numérico no método, devido a divisão pela derivada.
3. **Raízes múltiplas:** nos casos em que a função apresenta raízes múltiplas, o método de Newton-Raphson pode convergir lentamente (a convergência pode ser mais lenta porque, em uma raiz múltipla, a função se aproxima de uma reta horizontal, dificultando a convergência para valores mais precisos) ou até mesmo não convergir para a solução correta. A Figura 2d mostra como uma aproximação inicial que esteja próxima de uma raiz pode pular para uma posição distante por diversas raízes. Essa tendência de se afastar da área de interesse se dá porque foram encontradas inclinações próximas de zero. Isto é, a tangente à curva da função pode não fornecer uma boa aproximação, levando a iterações ineficientes ou a resultados errôneos. Além disso, o método de Newton-Raphson é altamente sensível à escolha da aproximação inicial, se essa aproximação estiver próxima de uma raiz múltipla, ela pode resultar na convergência para raízes “erradas”.

Além disso, Khalil (2016) destaca que a escolha do ponto inicial para iniciar as iterações é crucial no método de Newton-Raphson. Em algumas situações, selecionar um ponto inicial distante da raiz ou em uma região onde a função possui comportamento complexo pode resultar em iterações que não convergem ou que convergem lentamente para a solução desejada. Burden, Faires e Burden (2015) enfatiza que funções com comportamentos irregulares, como descontinuidades, picos ou oscilações excessivas, podem desafiar a capacidade do método de Newton-Raphson de encontrar soluções precisas.

Esses comportamentos complexos na função podem prejudicar a convergência do método, afetando sua capacidade de encontrar soluções precisas. Nessas situações, outras técnicas ou métodos numéricos podem ser mais apropriados para encontrar soluções precisas e estáveis.

Segundo Chapra e Canale (2011), não há um critério de convergência universal para o método de Newton-Raphson. A eficácia desse método está intrinsecamente ligada à natureza da função e à precisão da aproximação inicial. A única solução é garantir que a aproximação inicial esteja suficientemente próxima da raiz desejada. Em alguns casos, nenhuma aproximação será eficaz. A obtenção de boas aproximações geralmente depende do entendimento das condições do problema físico ou do uso de ferramentas, como gráficos, que oferecem informações sobre o comportamento da solução.

Figura 2 - Alguns casos nos quais o método de Newton-Raphson não convergência adequadamente.



Fonte: Chapra e Canale (2011)

2.5 Código em R

O código para obtenção dos resultados numéricos das aplicações foi feito no software R (R Core Team, 2022). O R é uma linguagem de programação e ambiente de software amplamente utilizado em estatísticas e análise de dados, mas também é extremamente útil em matemática, especialmente em cálculo numérico. Entre suas principais vantagens, destaca-se ser um software gratuito e de código aberto, com uma comunidade ativa que contribui com diversos pacotes.

Abaixo, é apresentado o código utilizado nas aplicações. Esse código também está disponível em <https://github.com/Nandodte/Luiz-Fernando--->

[TCC/blob/main/C%C3%B3digo%20para%20Newton-Raphson](#). Apesar de ter diversos pacotes que calculam o método de Newton-Raphson, esse código se diferencia pela sua saída retornar o número de iterações (i), os valores de x para cada iteração (x_i), os valores de $f(x)$ em cada iteração ($f x_i$) e também o valor do erro relativo em cada iteração (ϵ_r).

No código, temos que inserir a função em fx , escolher um chute inicial em x_0 , há também a possibilidade de controlar a tolerância do erro relativo em tol , o número máximo de iterações n , e o número de dígitos decimais na saída do código em $digitis$. A derivada no código é obtida pelo pacote `Deriv` (Clausen; Sokol, 2020).

```
library(Deriv)
newton<-function(fx, x0, tol=1e-5, n = 1000, digitis=6){
  f0 <- fx(x0)

  if (f0 == 0.0) {
    newton<- (x0)
    return(paste("x=",x0,"é a raiz da funcao.",sep = ','))
  }
  dx <- Deriv(fx) #derivada da função
  fxi<-c(f0)
  xis<-c(x0)
  erro<-c(NA)
  for (i in 1:n) {
    xi <- x0 - fx(x0) / dx(x0)
    xis[i+1]<-xi
    fxi[i+1]<-fx(xi)
    erro[i+1]<-abs((xi-x0)/xi)
    x0 <- xi
    if(erro[i+1]<tol) break
  }
  i<-0:(length(xis)-1)
  result<-round(cbind(i,xis,fxi,erro),digitis)
  nam<-c("i","x_i","f(x_i)","Erro")
  colnames(result)<-nam
  newton<-as.data.frame(result)
  return(newton)
}
```

Após, compilar o código em *R* acima, um exemplo de utilização do código, encontrar a raiz da função $f(x) = 2x - \cos(x)$, com chute inicial $x_0 = 0.4$ e $\varepsilon_r < 0.01$, é dado pelo seguinte código,

```
fx<-function(x) 2*x-cos(x)
newton (fx,0.4, tol=1e-2)
```

3 APLICAÇÕES E RESULTADOS

Com o avanço da computação, o método de Newton-Raphson se tornou verdadeiramente uma ferramenta versátil com uma ampla gama de aplicações. Como por exemplo,

- Engenharia: É usado para resolver equações não lineares em áreas como eletrônica, mecânica estrutural, análise de redes elétricas e mecânica dos fluidos.
- Ciência da Computação: Desempenha um papel fundamental em algoritmos de otimização, resolução de sistemas de equações não lineares e em métodos numéricos.
- Economia e Finanças: É empregado em modelos financeiros para calcular taxas de juros, preços de opções e na análise de dados econômicos complexos.
- Física e Ciências Naturais: Auxilia na solução de equações não lineares que modelam fenômenos físicos, como o movimento de planetas, reações químicas complexas e muito mais.

Para ilustrar, a aplicabilidade do método de Newton-Raphson, apresentaremos algumas aplicações e suas soluções numéricas. A aplicação em 3.1 foi adaptada do livro Vargas e Araki (2017). Contudo, as aplicações em 3.2, 3.3 e 3.4 são adaptadas de Chapra e Canale (2011) e última aplicação desse trabalho, em 3.5, foi extraída de Monteiro (2012). Em todas as aplicações, primeiramente ao interpretar cada situação foi construída a função necessária para resolvê-la, em seguida, o gráfico da função é feito para determinar o comportamento da função e escolher um chute inicial adequado, e foi definido como tolerância máxima em cada aplicação $\varepsilon_r < 10^{-3}$.

3.1 Aplicação 1: Engenharia Mecânica

A eficiência (η) do ciclo Diesel ar padrão para o motor a combustão é dada por

$$\eta = 1 - \frac{1}{r^{k-1}} \frac{r_c^k - 1}{k(r_c - 1)}$$

em que r_c é a razão de corte, r a razão de compressão e k a razão de calores específicos a pressão e volume constantes. Para $k = 1,4$ e $r = 10$, determine r_c , que representem $\eta = 40\%$ e 50% .

Primeiramente, para resolução dessa aplicação é necessário substituir os dados para k , r e η , obtendo assim as seguintes funções em função de r_c :

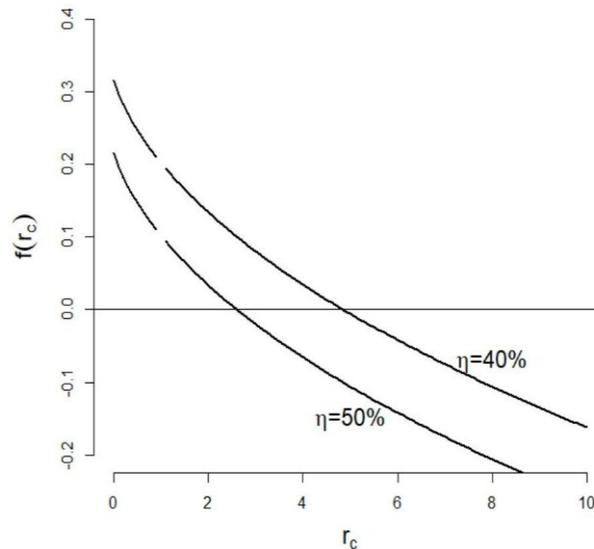
$$f(r_c) = 1 - \frac{1}{10^{0.4}} \left[\frac{r_c^{1.4} - 1}{1.4(r_c - 1)} \right] - 0.4 \quad \text{para } \eta = 40\% \quad (8)$$

e

$$f(r_c) = 1 - \frac{1}{10^{0.4}} \left[\frac{r_c^{1.4} - 1}{1.4(r_c - 1)} \right] - 0.5 \quad \text{para } \eta = 50\% \quad (9)$$

A Figura 3 exibe os gráficos de $f(r_c)$ das equações (8) e (9). É possível notar que as funções são adequadas para o método de Newton-Raphson, isto é, para um bom chute, o método irá convergir adequadamente. Apesar de haver uma descontinuidade em $r_c = 1$, o método não foi prejudicado; isso pode ser visto nas Tabelas 1 e 2, que apresentam os valores de r_c , $f(r_c)$ e ε_r para cada iteração.

Figura 3 - Gráfico de $f(r_c)$ para $\eta = 40\%$ e $\eta = 50\%$.



Fonte: Elaborada pelos autores

Os resultados das Tabelas 1 e 2 mostram a fácil convergência do método para essa aplicação. Mesmo com chutes iniciais levemente distantes das raízes das funções o método convergiu satisfatoriamente. Isso se deve pela “boa forma” da função, na qual as inclinações utilizadas pelo método possuem valores adequados.

Tabela 1 - Resultados de r_c em $f(r_c)$ para $\eta = 40\%$.

i	r_{ci}	$f(r_{ci})$	ε_r
0	4.000000	0.034649	NA
1	4.813404	0.001604	0.168987
2	4.854735	0.000003	0.008513
3	4.854825	0.000000	0.000019

Fonte: Elaborada pelos autores

Tabela 2 - Resultados de r_c em $f(r_c)$ para $\eta = 50\%$.

i	r_{ci}	$f(r_{ci})$	ε_r
0	1.300000	0.079290	NA
1	2.409047	0.010729	0.460368
2	2.606341	0.000197	0.075698
3	2.610107	0.000000	0.001443
4	2.610109	0.000000	0.000000

Fonte: Elaborada pelos autores

3.2 Aplicação 2: Engenharia Agrícola

Há água escoando em um canal trapezoidal a uma vazão de $Q = 20 \text{ m}^3/\text{s}$. A profundidade crítica y para tal canal deve satisfazer a equação

$$1 - \frac{Q^2}{gA_c^3} B = 0$$

onde $g = 9,81 \text{ m}^2/\text{s}$, A_c é a área da seção transversal (m^2) e B é a largura do canal na superfície (m). Para esse canal, a largura e a área transversal podem ser relacionadas com a profundidade y por

$$B = 3 + y \text{ e } A_c = 3y + \frac{y^2}{2}$$

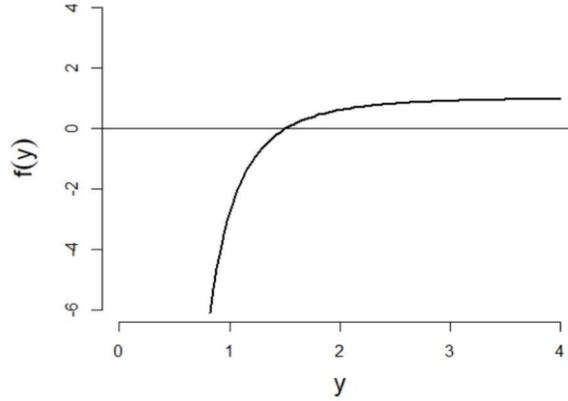
Encontre a profundidade crítica desse canal.

Fazendo as substituições adequadas, podemos escrever para essa aplicação a seguinte equação não-linear em função de y ,

$$f(y) = 1 - \frac{400}{9.81 \left(3y + \frac{y^2}{2}\right)^3} \cdot (3 + y) \quad (10)$$

Note que a equação (10) possui descontinuidade em $y = 0$ e $y = -6$. Contudo, esses valores não são significativos para a aplicação em questão. A Figura 4 apresenta o gráfico de $f(y)$.

Figura 4 - Gráfico de $f(y)$ referente a aplicação 2.



Fonte: Elaborada pelos autores

Pela Figura 4, podemos observar que $f(y) = 0$ está na região $1 < y < 2$, sendo que nessa vizinhança a função tem um bom comportamento, facilitando assim, a aplicação do método de Newton-Raphson nesse problema. Contudo, pelo gráfico, fica evidente que um chute inicial não adequado nesse problema pode causar problemas na convergência. Por exemplo, chutes próximos de $y = 0$ ou com $y > 3$ poderiam causar problemas, mesmo sendo valores ainda não tão distantes da raiz da função.

A Tabela 3, contém os resultados do método de Newton-Raphson para essa aplicação, considerando um chute de $y = 1.3$. Com esse valor o método convergiu adequadamente, informando que nas condições do problema a profundida crítica do canal seria de aproximadamente 1,51 metros.

Tabela 3 - Resultados de y para a aplicação 2.

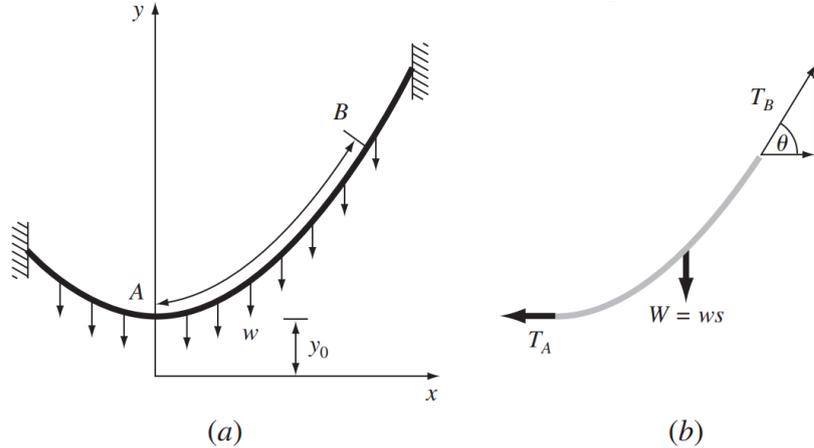
i	y_i	$f(y_i)$	ε_r
0	1.300000	-0.641159	NA
1	1.457144	-0.133216	0.107844
2	1.509700	-0.009459	0.034812
3	1.514029	-0.000057	0.002859
4	1.514055	0.000000	0.000017

Fonte: Elaborada pelos autores

3.3 Aplicação 3: Engenharia Civil

Um cabo catenário é um cabo que está pendurado entre dois pontos que não estão na mesma reta vertical. Observe a figura abaixo.

Figura 5 - (a) As forças agindo em uma seção AB de um cabo flexível pendurado. A carga é uniforme ao longo do cabo (mas não é uniforme por distância horizontal x). (b) Um diagrama de corpo livre da seção AB.



Fonte: Chapra e Canale (2011).

Observe no painel (a) da figura que o cabo não está sujeito a nenhuma carga além do seu próprio peso. Portanto, seu peso (N/m) age como uma carga uniforme por unidade de comprimento ao longo do cabo. Um diagrama de corpo livre de uma seção AB é descrito no painel (b), onde T_A e T_B são as forças de tensão nas extremidades. Com base nos balanços de força horizontal e vertical, é possível deduzir a seguinte equação para modelar o cabo e assim determinar a altura y do cabo como uma função da distância x :

$$y = \frac{T_A}{\omega} \cosh \frac{\omega}{T_A} x + y_0 - \frac{T_A}{\omega}.$$

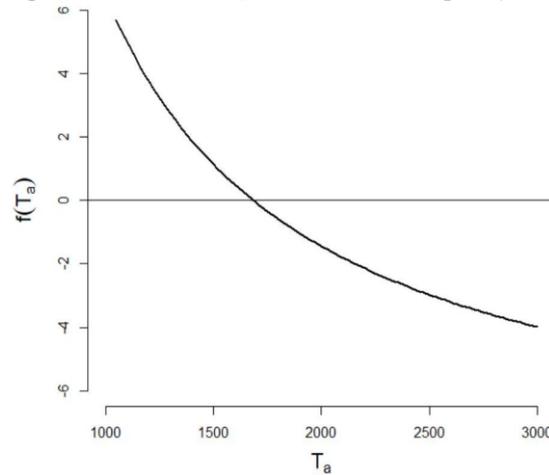
Calcular um valor para o parâmetro T_A dados os valores para os parâmetros $\omega = 12$ e $y_0 = 6$, tal que o cabo tenha uma altura $y = 15$ em $x = 50$.

Considerando as informações do problema e fazendo as substituições adequadas, a equação não linear em função de T_A para essa aplicação será,

$$f(T_A) = \frac{T_A}{12} \cosh \frac{600}{T_A} - \frac{T_A}{12} - 9 \quad (11)$$

A equação apresentada em (11) possui um bom comportamento, como pode ser visto na Figura 6. Podemos notar no gráfico que a raiz dessa função está no intervalo $1500 < T_A < 2000$. Aqui nessa equação é importante considerar para um chute inicial um valor relativamente alto, isso difere de casos anteriores, no qual os chutes iniciais eram valores baixos. Vale, então, o alerta sobre o chute inicial: um chute inicial com valor baixo nessa aplicação não terá dificuldade em convergir.

Figura 6 - Gráfico de $f(T_A)$ referente a aplicação 3.



Fonte: Elaborada pelos autores.

A Tabela 4 apresenta os resultados para o método de Newton-Raphson aplicado a equação (11), considerando um chute de $T_A = 1500$. É possível notar que o método convergiu adequadamente, informando que pelas informações a força de tensão T_A é de aproximadamente 1684,36 Newtons.

Tabela 4 - Resultados de T_A para a aplicação 3.

i	x_i	$f(x_i)$	ε_r
0	1500.000	1.134046	NA
1	1663.508	0.115267	0.098291
2	1684.099	0.001454	0.012226
3	1684.365	0.000000	0.000158

Fonte: Elaborada pelos autores

3.4 Aplicação 4: Matemática

O volume V de líquido em um cilindro horizontal raso de raio r e comprimento L se relaciona com a profundidade do líquido h por

$$V = \left[r^2 \cos^{-1} \left(\frac{r-h}{r} \right) - (r-h) \sqrt{2rh - h^2} \right] L$$

Encontre h dado que $r = 2 \text{ m}$, $L = 5 \text{ m}$, e $V = 8,5 \text{ m}^3$.

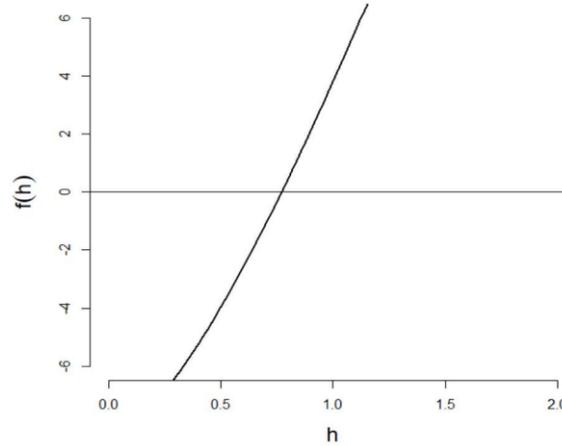
Ao substituir adequadamente as informações do problema na fórmula do volume, obtemos a seguinte equação não-linear em função de h ,

$$f(h) = \left[4 \cos^{-1} \left(1 - \frac{h}{2} \right) - (2-h) \cdot \sqrt{4h - h^2} \right] \cdot 5 - 8,5 \quad (12)$$

É possível verificar que o domínio da equação (12) é o intervalo $[0, 4]$, caso contrário, haverá problemas numéricos que nenhum método pode resolver. Logo, os chutes iniciais têm que estar dentro desse intervalo. Na Figura 7, temos o gráfico da função $f(h)$ em um recorte de seu domínio, na vizinhança da raiz da função. Pelo gráfico da função, essa é uma função que tem bom comportamento na vizinhança da raiz.

A Tabela 5 apresenta os resultados para o método de Newton-Raphson aplicado a equação (12), considerando um chute inicial de $h = 1,0$. Claramente, é visto que o método convergiu adequadamente. Portanto, considerando as informações a altura h adequado do cilindro é de 0,7791 metros.

Figura 7 - Gráfico de $f(h)$ referente a aplicação 4.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Tabela 5 - Resultados de h para a aplicação 4.

i	h_i	$f(h_i)$	ε_r
0	1.000000	3.783697	NA
1	0.781548	0.151962	0.279512
2	0.771967	0.000354	0.012412
3	0.771944	0.000000	0.000029

Fonte: Elaborada pelos autores.

3.5 Aplicação 5: Finanças

Considere a seguinte equação:

$$C = \frac{M}{i} [1 - (1 + i)^{-n}]$$

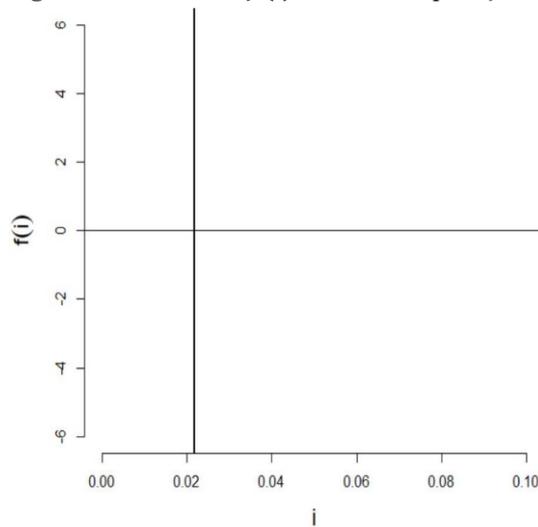
em que C é o capital emprestado, M é a mensalidade, r é a taxa de juro por cada período e n é o número de períodos. Uma pessoa pode pagar uma mensalidade de 300 reais. Se pretender contrair um empréstimo de 10.000 reais a 5 anos, qual é a taxa que poderá suportar?

Substituindo de forma adequada as informações desse problema, obtemos a seguinte equação não-linear em função de i ,

$$f(i) = \frac{300}{i}(1 - (1 + i)^{-60}) - 10000 \quad (13)$$

O gráfico da equação (13) é apresentado na Figura 8. É possível notar que o gráfico próximo de sua raiz é praticamente vertical; dessa forma, foi necessário dar um chute inicial muito próximo da raiz para o método convergir adequadamente (vide Tabela 6). Apesar da inclinação da função não ser a mais adequada e haver a necessidade de um chute inicial mais preciso, o método conseguiu convergir adequadamente nessas condições. Assim, podemos dizer que a taxa de juros adequada nesse empréstimo é de 2,175%.

Figura 8 - Gráfico de $f(i)$ referente a aplicação 5.



Fonte: Elaborada pelos autores

Tabela 6 - Resultados de i para a aplicação 5.

i	x_i	$f(x_i)$	ε_r
0	0.020000	428.266003	NA
1	0.021696	12.868777	0.078179
2	0.021750	0.012496	0.002491
3	0.021750	0.000000	0.000002

Fonte: Elaborada pelos autores

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em resumo, o Método de Newton-Raphson é uma ferramenta poderosa para encontrar raízes de equações não lineares, com aplicações em uma variedade de campos. Escolher bem os chutes iniciais, considerar as equações de forma adequada e verificar o comportamento das funções são fundamentais para conseguir resultados certos e precisos. Essa técnica é muito útil para resolver problemas difíceis que não dá para resolver de forma analítica e é superimportante na análise numérica de hoje em dia.

De fato, o Método de Newton-Raphson é uma ferramenta matemática muito poderosa usada em muitas áreas, desde resolver equações complicadas na engenharia até otimizar funções complexas da matemática. Ele é eficaz, rápido e fácil de usar em programas de computador, sendo uma escolha valiosa no cálculo numérico. Esse método, que vem sendo usado desde o século XVII, é incrível para se aproximar rapidamente e com precisão das raízes de funções, sendo super útil na solução de problemas práticos.

A dedução do método através da série de Taylor e a interpretação geométrica oferecem entendimentos sobre a fundamentação teórica por trás da técnica, enquanto a análise de erros e critérios de parada proporciona uma compreensão mais profunda de sua convergência rápida. Apesar de sua eficácia, é importante reconhecer que o Método de Newton-Raphson enfrenta desafios em situações específicas, como a presença de raízes múltiplas, escolha inadequada de pontos iniciais e comportamentos irregulares em funções. Contudo, a compreensão dessas limitações permite considerar métodos alternativos quando necessário.

Disponibilizar o código em linguagem R torna o Método de Newton-Raphson acessível e útil para quem deseja programar o método. Essa técnica é essencial para cientistas, engenheiros e pesquisadores resolverem problemas complicados de forma eficiente e precisa. Em resumo, o Método de Newton-Raphson continua sendo uma peça-chave nos métodos numéricos, impulsionando o avanço científico e tecnológico devido à sua simplicidade, eficiência e aplicação ampla na solução de equações não lineares.

REFERÊNCIAS

AMARAL, C.; SOUZA, M.; CATALAN, T. Um estudo do método de Newton-Raphson. **Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco**, p. 42, 2015.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. [S. l.]: Editora Blucher, 2019.

BURDEN, R. L.; FAIRES, D. J.; BURDEN, A. M. **Análise numérica**. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos numéricos para engenharia**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.

CLAUSEN, A.; SOKOL, S. **Deriv**: R-based Symbolic Differentiation. [S. l.], 2020. Deriv package version 4.1. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=Deriv>.

KHALIL, H. **Nonlinear systems**. New Jersey: Prentice Hall, 2016.

MONTEIRO, M. T. T. **Métodos numéricos**: exercícios resolvidos aplicados à engenharia e outras ciências. 2012. Universidade do Minho.

QUEIROZ, Cleber da Costa. **Funções e equações polinomiais**: comportamento da função do 3º grau. 2013. 52 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

R CORE TEAM. **R**: a language and environment for statistical computing. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2022. Disponível em: <https://www.R-project.org/>.

SOSSOLOTE, Junior de Oliveira. **O método de Newton-Raphson e aplicações**. 2021. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal de Grande Dourados, 2021.

VARGAS, R. V. C.; ARAKI, L. K. **Cálculo numérico aplicado**. Barueri, SP: Manole, 2017.

CAPÍTULO XI

PROBLEMAS LINEARES E ALGUMAS SOLUÇÕES

DOI: 10.51859/amplla.epm963.1125-11

Lara Fantuci Galvão
larafantuci@hotmail.com

Valter Soares de Camargo
valter.camargo@unespar.edu.br

Marcos Vinicius de Oliveira Peres
marcos.peres@ies.unespar.edu.br

Rafael Mestrinheire Hungaro
rafaelhungaro@hotmail.com

RESUMO

Esse trabalho tem como objetivo o estudo de problemas lineares, tendo em vista que se trata de um tema importante e de grande relevância, devido às suas diferentes formas de resolução. O intuito deste artigo é mostrar algumas situações que geram problemas lineares, situações nas quais se tem apenas uma equação e mais de uma incógnita, as quais são chamadas de equações Diofantinas. Quando encontramos uma quantidade maior de equações em um problema, devido às suas restrições, o associamos a um sistema linear para sua resolução, portanto utilizamos outros métodos para resolver. Assim, foi abordado alguns métodos de resolução, tais como a utilização do Algoritmo de Euclides para auxiliar na solução de Equações Diofantinas, o método da substituição e eliminação de Gauss para resolver sistemas lineares e também a representação gráfica de sistemas com duas ou três variáveis utilizando o software GeoGebra. Além disso, com este trabalho verificamos que quando visualizamos a representação gráfica, torna-se mais fácil compreender os cálculos algébricos e as diferentes classificações dos sistemas lineares associados aos problemas lineares.

Palavras-chave: Problemas Lineares. Equações Diofantinas. GeoGebra.

1 INTRODUÇÃO

Resolver um problema linear, em geral, significa solucionar certos problemas práticos do nosso cotidiano, portanto todo o processo de modelagem desses problemas nos leva a entender conceitualmente cada caso. Equações lineares com coeficientes inteiros recebem o nome de equações Diofantinas, em homenagem ao matemático Diofanto de Alexandria, embora pouco se conheça sobre ele, dentre os matemáticos que estudaram a Teoria dos Números, sem dúvida, Diofanto foi um dos mais importantes. Sua obra *Aritmética*, escrita por volta de 250 d.c., trata principalmente da solução de equações indeterminadas com coeficientes inteiros.

Uma equação que tem apenas uma incógnita é escrita pela forma $ax = b$, sua solução no conjunto dos reais é dada por $x = b \cdot a^{-1}$. Entretanto há problemas que envolvem duas ou mais incógnitas, por exemplo o problema proposto por Leonard Euler (1707-1783) descrito por: “Decomponha o número 100 em duas parcelas positivas tais que uma é múltiplo de 7 e a outra de 11” (Domingues e Iezzi, p. 52, 2003). Nesse problema temos duas incógnitas, que podemos representar sob a forma $7x + 11y = 100$.

Problemas que envolvem duas ou mais variáveis com coeficientes inteiros de maneira geral tem a forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = k$. A depender do problema que tenhamos modelado, o número de incógnitas é aumentado e também pode-se aumentar o número de equações, visto que outras restrições podem surgir ao longo da modelagem, nesse caso teremos um problema modelado a por um sistema de equações lineares, a forma geral é dada por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = k_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = k_m \end{cases}$$

Há diferentes métodos para resolver problemas lineares associado a um sistema linear, alguns bem clássicos como o método da substituição, adição e comparação para os casos que envolvem duas equações lineares. Já em situações em que o problema modelado envolve um número expressivo de variáveis e restrições lineares é possível utilizar Programação Linear (PL), nesses casos passamos a chamá-los de Problemas de Programação Linear - PPL. Segundo Hillier (2013) a Programação Linear visa o planejamento de atividades para atingir um resultado ótimo, utilizando um modelo matemático.

Um método muito utilizado para um PPL que envolve duas ou três variáveis é o método gráfico; já para problemas maiores com restrições lineares o mais utilizado é o método simplex, implementado e executado em computadores, sendo extremamente eficiente. Outros métodos

para resolução de problemas que envolvem sistemas lineares incluem a decomposição LU, decomposição Cholesky, método de Gauss-Seidel, regra de Cramer, entre outros, que não serão aprofundadas nesse trabalho.

Na próxima seção faremos uma breve descrição de alguns métodos de resolução de alguns problemas lineares específicos.

2 MÉTODOS E SOLUÇÕES

As Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas, representadas pela forma $ax + by = c$, são solúveis se o máximo divisor comum (mdc) de seus coeficientes divide o termo independente, $mdc(a, b) | c$, como apresentado e demonstrado na proposição: “Uma equação diofantina linear $ax + by = c$ tem solução se, e somente se, $d = mdc(a, b)$ é um divisor de c . Domingues e Iezzi, p. 50, 2003).

Esse resultado pode ser generalizado para três ou mais incógnitas, ou seja, as Equações Diofantinas representadas por $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = k$, sendo $a_i \in Z, a_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$ e $k \in Z$, admite solução caso o $mdc(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ divide k .

Utilizaremos um problema prático, já citado no texto acima, para apresentarmos o método de solução que utiliza da proposição, sendo ele o Problema 1.

Problema 1: (Problema do Matemático L. Euler) “Decomponha o número 100 em duas parcelas positivas tais que uma é múltiplo de 7 e a outra de 11.”

A partir do Algoritmo de Euclides, encontra-se o máximo divisor comum dos números 7 e 11 através de um dispositivo prático, primeiramente dividimos o maior pelo menor, nesse caso o 11 por 7 o quociente é 1 e o resto 4, aplicando no dispositivo, temos:

Figura 1 - Dispositivo prático

Quociente	1
11	7
(Resto) 4	

Fonte: Elaborado pelos autores.

Continuando o processo, o divisor (7) irá dividir o resto (4), o quociente é 1 e o resto 3.

Figura 2 - Dispositivo prático

Quociente	1	1
11	7	4
(Resto) 4	3	

Fonte: Elaborado pelos autores.

E fazendo esse procedimento até chegar no valor do resto igual a 0, ou seja,

Figura 3 - Dispositivo prático

Quociente		1		1		1		3
11		7		4		3		1
(Resto) 4		3		1		0		

Fonte: Elaborado pelos autores.

Assim, temos que o $m.d.c.(7,11) = 1$.

Podemos observar que aplicando o algoritmo de Euclides o $mdc = 1$ e, claramente 1 divide 100, portanto a equação tem solução, segundo a proposição acima. Aplicando uma reconstrução inversa do dispositivo temos que:

$$1 = 4 - 3 \cdot 1$$

como,

$$3 = 7 - 4 \cdot 1$$

e

$$4 = 11 - 7 \cdot 1$$

Segue que,

$$1 = 4 - 3 \cdot 1 = 4 - (7 - 4 \cdot 1) \cdot 1 = 4 - 7 + 4 = 2 \cdot 4 - 7 = 2(11 - 7 \cdot 1) - 7$$

$$2 \cdot 11 - 2 \cdot 7 - 7 = 2 \cdot 11 - 3 \cdot 7 = 2 \cdot 11 + (-3) \cdot 7$$

Desta forma, encontramos múltiplos de 11 acrescido de múltiplos de 7 que somam o mdc encontrado.

Fazendo, $x_0 = -3$ e $y_0 = 2$, e multiplicando por 100, temos uma solução particular $(-300, 200)$ da equação originada pelo problema. Entretanto, essa solução particular não é uma solução viável do problema de Euler, como apresentado na proposição que versa sobre a solução geral: “Se a equação diofantina $ax + by = c$ tem uma solução (x_0, y_0) , então tem infinitas soluções e o conjunto destas é:

$$S = \left\{ \left(x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t \right) \mid t \in Z \right\}$$

em que o $d = mdc(a, b)$.” (Domingues e Iezzi, p. 51, 2003).

Portanto, encontrando a equação geral, que é dada por:

$$S = \left\{ \left(x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t \right) \mid t \in Z \right\}$$

Temos,

$$S = \left\{ \left(-300 + \frac{11}{1}t, 200 - \frac{7}{1}t \right) \mid t \in Z \right\}$$

$$S = \{(-300 + 11t, 200 - 7t) \mid t \in Z\}$$

Como são números inteiros positivos,

$$-300 + 11t > 0 \text{ (I)}$$

$$200 - 7t > 0 \text{ (II)}$$

Segue de (I):

$$11t > 300$$

$$t > 27,3$$

Segue de (II):

$$200 > 7t$$

$$28,6 > t$$

Logo,

$$27,3 < t < 28,6$$

Sendo $t = 28$,

$$-300 + 11(28) = 8$$

$$200 - 7(28) = 4$$

Portanto,

$$7x + 11y = 100$$

$$7(8) + 11(4) = 100$$

$$56 + 44 = 100$$

A solução geral é (8,4), e os números que são resposta do Problema 1 de Euler são 56 e 44.

Para generalizar uma solução geral com mais de duas incógnitas é necessário usar artifício para representar a equação que admite solução com uma outra equação reduzida de duas incógnitas, já apresentada anteriormente, para isso resolve reduzindo uma incógnita por vez da equação até chegar em uma equação de duas incógnitas.

Quando temos mais de uma equação, temos um problema linear que se associa a um sistema de equações lineares, a solução do sistema linear, se houver, é o conjunto de valores válidos para todas as equações do sistema. Um exemplo que envolve duas equações é dado no Problema 2.

Problema 2: Em um torneio realizado com duas equipes A e B. Sabendo que os pontos da equipe A somado ao dobro dos pontos da equipe B resultou em cinco pontos. E que, o triplo dos pontos da equipe A subtraído do quádruplo dos pontos da equipe B resultou em quatro pontos. Quantos pontos tem as equipes A e B?

Será usado o método da substituição para resolver o Problema 2, considere a equipe A como x e a equipe B como y . O método da substituição exige o isolamento de uma incógnita em uma das equações do sistema S .

$$S = \begin{cases} x + 2y = 5(I) \\ 3x - 5y = 4(II) \end{cases}$$

Iremos isolar x na Equação (I), isto é,

$$x = 5 - 2y(III)$$

Substituindo o valor de x encontrado em (III) na Equação (II), segue que:

$$\begin{aligned} 3(5 - 2y) - 5y &= 4 \\ 15 - 6y - 5y &= 4 \\ -11y &= -11 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Dessa forma, encontramos o valor 1 para y , logo a Equação (III) fica,

$$\begin{aligned} x &= 5 - 2(1) \\ x &= 5 - 2 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Portanto, a solução é $(3,1)$, o que nos dá como resposta três pontos para a equipe A e um ponto para a equipe B.

Outro exemplo de um problema que envolve três equações, é o Problema 3 enunciado a seguir,

Problema 3: Considerando três números sendo representados por X, Y e Z . O dobro de X somado ao dobro de Y e somado Z , o total é 4 . Sabendo que o triplo de X , adicionado Y é equivalente ao dobro de Z mais 5 . E que, X é equivalente ao triplo de Z subtraído 2. Quais são os devidos números X, Y e Z ?

Podemos transformar este problema no sistema linear A:

$$A = \begin{cases} 2x + 2y + z = 4 \\ 3x + y = 2z + 5 \\ x = 3z - 2 \end{cases}$$

Como o sistema A é maior por ter três equações, podemos resolver recorrendo ao método de eliminação de Gauss, com o escalonamento incompleto, aplicando este método no Problema 3, primeiramente isolamos as incógnitas do lado esquerdo da igualdade, temos:

$$A = \begin{cases} 2x + 2y + z = 4(I) \\ 3x + y - 2z = 5(II) \\ x - 3z = -2(III) \end{cases}$$

Para facilitar os cálculos iremos permutar a Equação (I) com a Equação (III), para a primeira equação do sistema ser a que x tem coeficiente 1, isto é,

$$A = \begin{cases} x - 3z = -2 \\ 3x + y - 2z = 5 \\ 2x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

Colocando os coeficientes em forma de matriz, segue que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Para zerar o coeficiente de x na linha 2 precisamos multiplicar os valores da primeira linha por (-3) e somar com a linha 2, ou seja, $L_2 = L_2 - 3L_1$ e na linha 3 multiplicar os valores da primeira linha por (-2) e somar com a linha 3, $L_3 = L_3 - 2L_1$. Dessa forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Novamente para zerar o coeficiente de y na linha 3, multiplicamos os valores da linha 2 por (-2) e somamos a linha 3, $L_3 = L_3 - 2L_2$. Logo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{bmatrix}$$

Com isso, podemos reescrever a matriz na forma de sistema linear:

$$\begin{cases} x + 0y - 3z = -2 \text{ (I)} \\ 0x + y + 7z = 11 \text{ (II)} \\ 0x + 0y - 7z = -14 \text{ (III)} \end{cases}$$

Como na Equação (III), o z está isolado, pois os demais coeficientes são nulos, é possível descobrir o valor de z :

$$\frac{-7z}{z} = \frac{-14}{2}$$

Substituindo o valor de z encontrado, na Equação (II), temos que:

$$\begin{aligned} y + 7(2) &= 11 \\ y + 14 &= 11 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

E para finalizar trocando o valor de z , na Equação (I), obtemos:

$$\begin{aligned} x - 3(2) &= -2 \\ x - 6 &= -2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

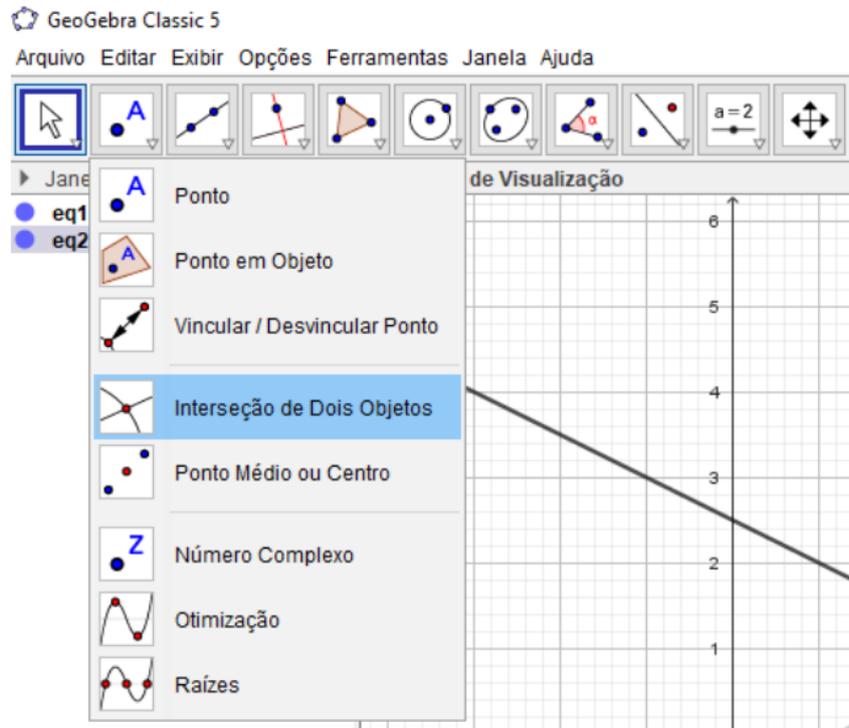
Portanto, a solução do sistema é $S = \{4, -3, 2\}$, o que nos dá como resposta do Problema 3, X igual ao número 4, Y igual ao número -3, e Z igual ao número 2.

Existe mais de uma classificação para sistemas lineares. Alguns sistemas não possuem solução, e são denominados sistemas impossíveis – ou seja, não há um conjunto de valores para suas incógnitas que façam todas as equações serem válidas.

Geralmente no sistema impossível gera uma sentença matemática inválida ou contraditória com as demais equações. Há sistemas que, em vez de não ter nenhuma solução, existem diversas soluções; nesses casos são chamados de sistema possível e indeterminado. Há também o sistema possível e determinado, ou seja, apresenta uma única solução.

Utilizamos o software GeoGebra como um recurso de apoio gráfico para visualização e compreensão da classificação de sistema linear, com exemplos de sistemas com duas equações e duas incógnitas. Para inserir no GeoGebra coloque as duas equações separadamente na entrada e parecerá na janela de álgebra, após clique na opção “Intersecção de Dois Objetos” (como mostra a Figura 4) e selecione as duas retas.

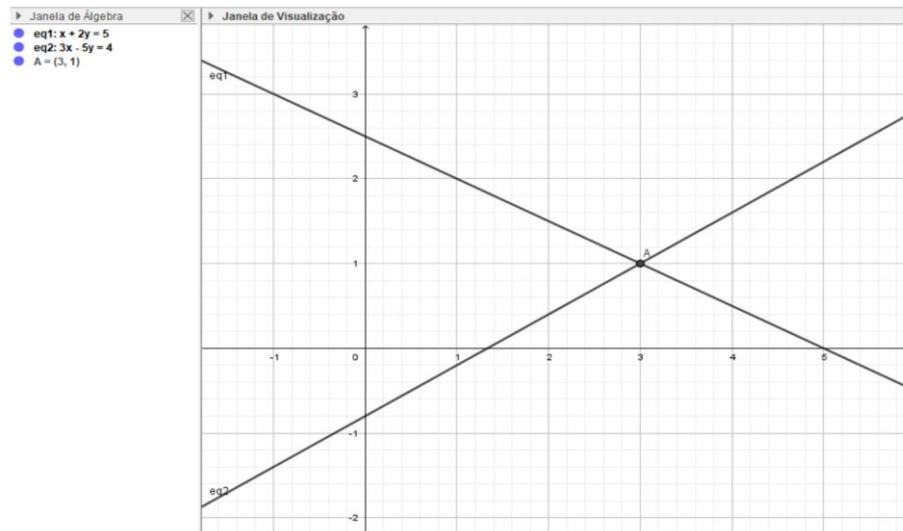
Figura 4 - Opção de Intersecção de Dois Objetos do GeoGebra



Fonte: Elaborado pelos autores.

Graficamente o sistema possível e determinado ficará representado, como mostra a Figura 5,

Figura 5 - Representação no GeoGebra sistema 2x2 possível e determinado.



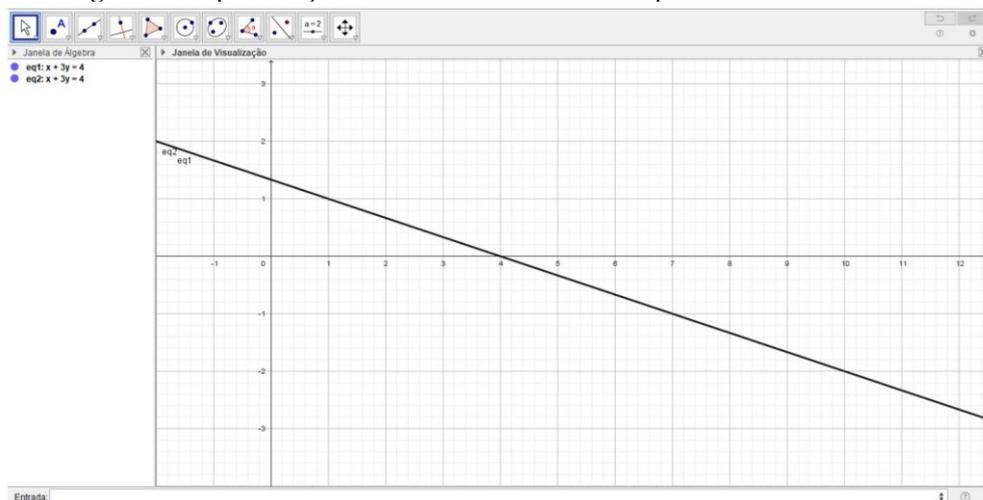
Fonte: Elaborado pelos autores.

Na Figura 5, foi inserido como exemplo o sistema,

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

Visualizando o gráfico facilita a compreensão da solução do sistema, é o único par de coordenadas que intercepta as duas retas, onde há o “cruzamento” das informações; nesse caso, a solução seria o ponto $A = (3,1)$.

Figura 6 - Representação no GeoGebra sistema 2×2 possível e indeterminado.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Já na Figura 6 acima, o exemplo do sistema utilizado foi,

$$\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ 3x + 9y = 12 \end{cases}$$

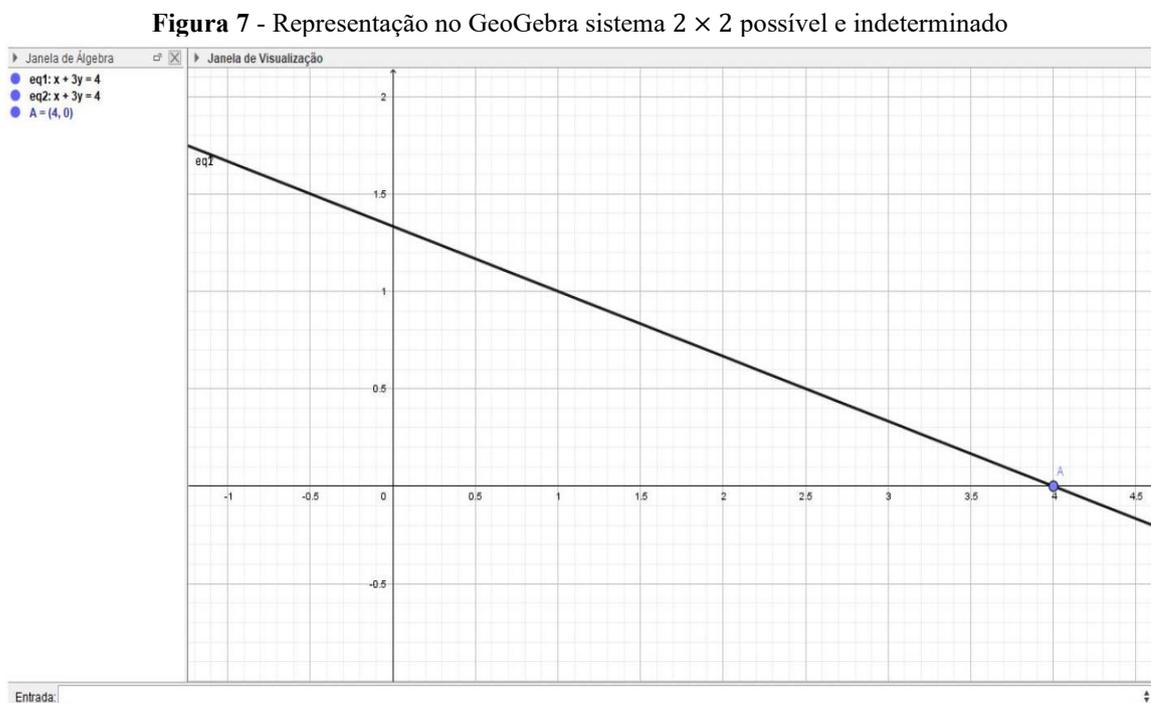
Quando inserido no GeoGebra automaticamente simplifica as duas equações para $x + 3y = 4$, pois uma equação é múltipla da outra. Basta dividir a primeira equação por 2 e segunda

equação por 3. Dessa forma, analisamos que as retas são coincidentes, com isso há infinitos pontos que intercepta as duas retas e que são solução desse sistema, por isso, sistema possível e indeterminado.

Caso seja necessário para melhor compreensão, podemos escolher um ponto arbitrário dessas retas e testar se é solução do sistema, na ferramenta “ponto” e selecionando um ponto qualquer pertencente à reta. Para exemplificar utilizaremos o ponto (4,0), que substituindo os valores nas equações para fazer prova real, temos que:

$$\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ 3x + 9y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(4) + 6(0) = 8 \\ 3(4) + 9(0) = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 + 0 = 8 \\ 12 + 0 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 = 8 \\ 12 = 12 \end{cases}$$

Portanto, o ponto (4,0) é uma das soluções desse sistema, analisando como fica no GeoGebra:



Fonte: Elaborado pelos autores.

Na Figura 8 abaixo, o exemplo do sistema foi:

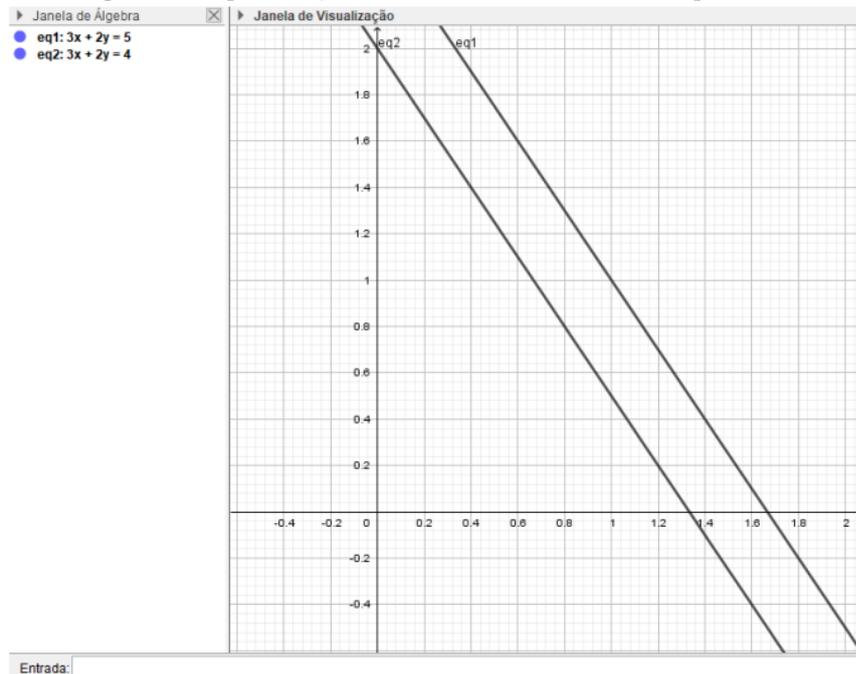
$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \text{ (I)} \\ 6x + 4y = 8 \text{ (II)} \end{cases}$$

É possível analisar que não terá solução, pois não existe intersecção entre as retas, ou seja, não terá uma solução válida. Basta dividirmos a equação (II) por 2, que chegaremos no absurdo:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

Ou seja, não temos uma solução para o sistema.

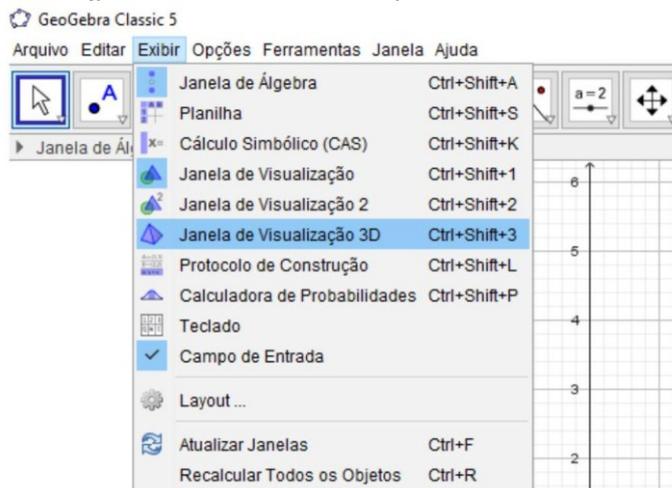
Figura 8 - Representação no GeoGebra sistema 2×2 impossível.



Fonte: Elaborado pelos autores.

A seguir, apresenta-se a interpretação geométrica de sistemas lineares de três equações e três incógnitas no GeoGebra. Nesses casos, utilizamos a Janela de Visualização 3D, basta ir na opção de “Exibir” e selecionar “Janela de Visualização 3D” (como mostra a Figura 9), podendo também selecionar a opção de “Janela de Visualização” para fechar essa janela e manter somente a Janela 3D e a Janela de Álgebra.

Figura 9 - Janela de Visualização 3D no GeoGebra.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Para inserir as equações no GeoGebra, basta digitá-las individualmente na barra de entrada. Cada equação que será representada por um plano. Após plotar os três planos, selecione a opção de “Interseção de Duas Superfícies” (como mostra a Figura 10) e selecione os planos

de dois em dois, com isso será gerado três retas, selecione a opção “Interseção de Dois Objetos” (como mostrado na Figura 4) e escolha duas dessas retas e terá a solução.

Figura 10 - Interseção de Duas Superfícies no GeoGebra



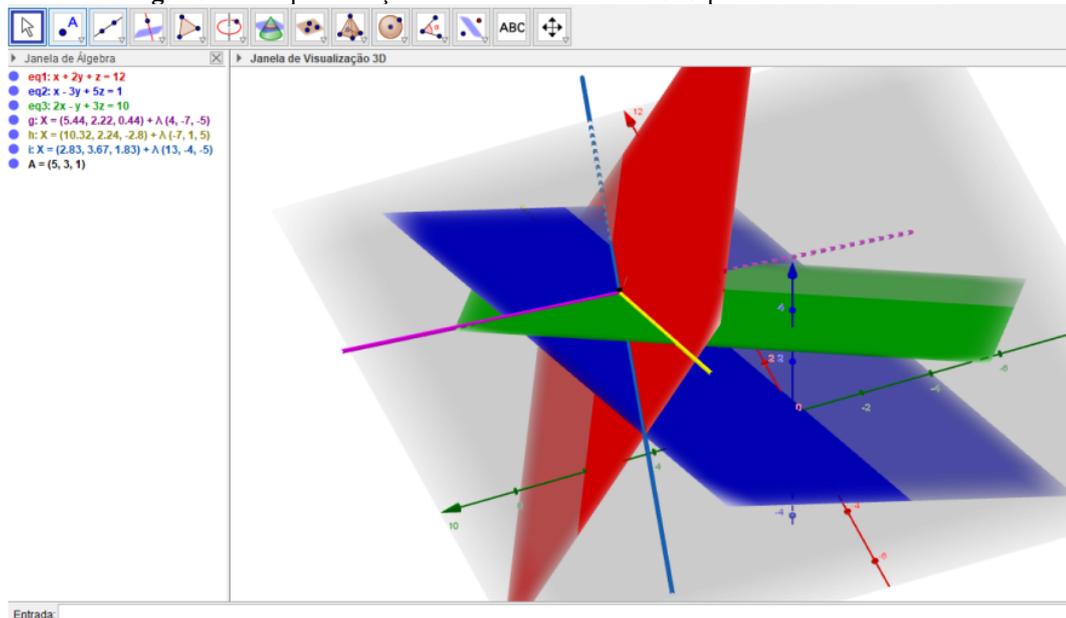
Fonte: Elaborado pelos autores.

Tomemos como exemplo o sistema,

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ x - 3y + 5z = 1 \\ 2x - y + 3z = 10 \end{cases}$$

Nesse sistema a solução é (5,3,1), representado pelo ponto A, como temos uma única solução, portanto é um sistema possível e determinado, como mostra a Figura 11:

Figura 11 - Representação no GeoGebra sistema 3x3 possível e determinado



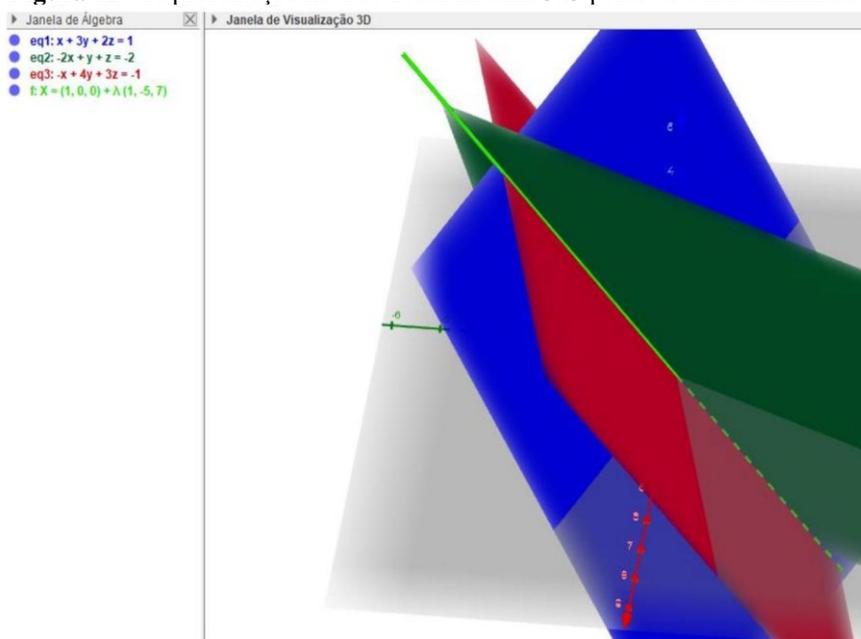
Fonte: Elaborado pelos autores.

No caso de sistemas possíveis e indeterminados, os três planos serão coincidentes, ou dois planos serão coincidentes e o terceiro plano intersectará esses dois planos, gerando uma reta, ou ainda a interseção dos três planos será uma reta. Vejamos alguns exemplos de como ficará a representação, no sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ -2x + y + z = -2 \\ -x + 4y + 3z = -1 \end{cases}$$

Com a Figura 12 é possível verificar que os planos não são coincidentes e que a interseção é uma reta.

Figura 12 - Representação no GeoGebra sistema 3x3 possível e indeterminado.



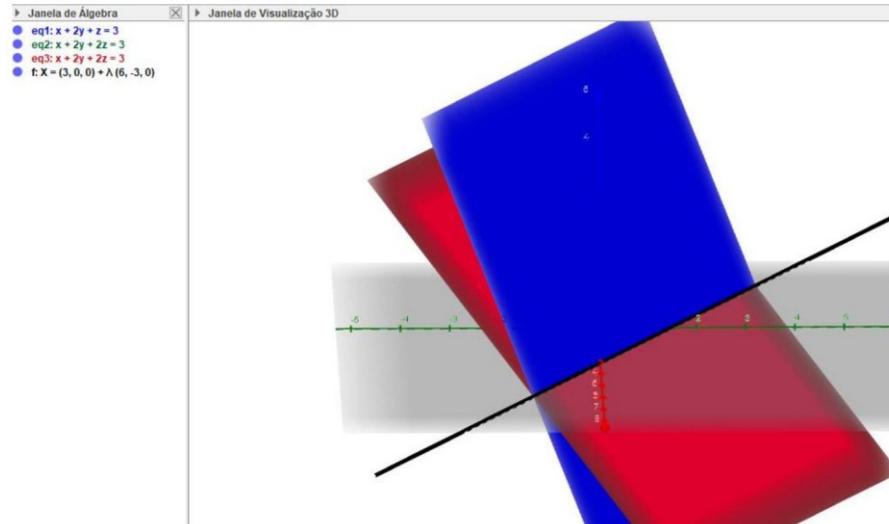
Fonte: Elaborado pelos autores.

Outro exemplo,

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 4y + 4z = 6 \\ 3x + 6y + 6z = 9 \end{cases}$$

Portanto, nesse caso, serão dois planos coincidentes e um outro plano que os intercepta, formando uma reta.

Figura 13 - Representação no GeoGebra sistema 3x3 indeterminado.

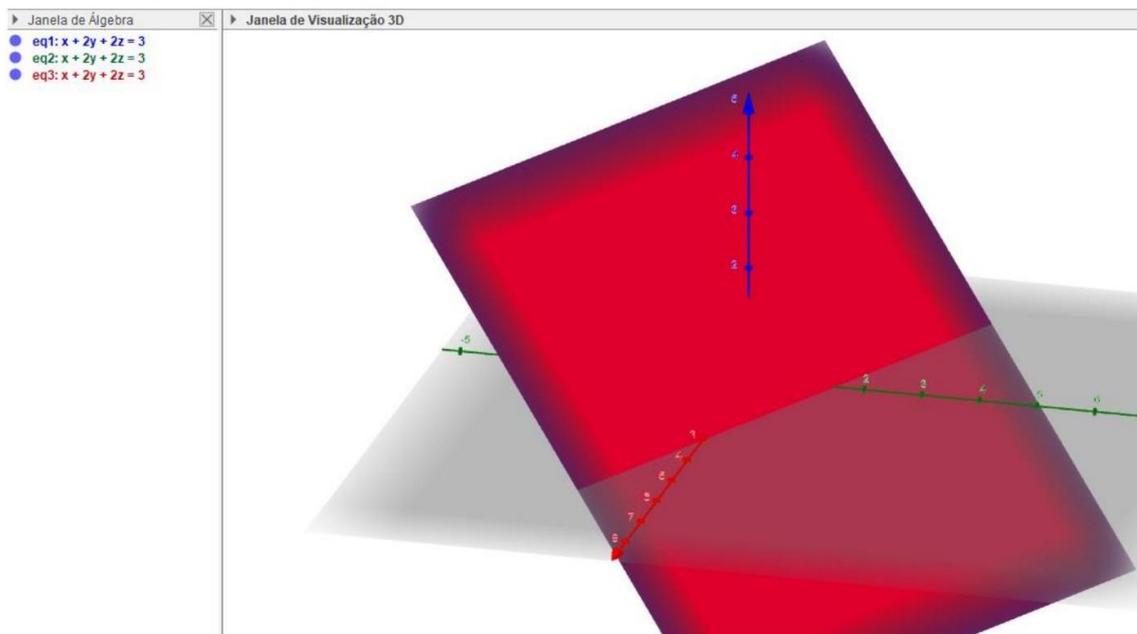


Fonte: Elaborado pelos autores.

E mais um exemplo de sistema possível e indeterminado, seria o de 3 planos coincidentes,

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 2x + 4y + 4z = 6 \\ 3x + 6y + 6z = 9 \end{cases}$$

Figura 14 - Representação no GeoGebra sistema 3x3 indeterminado, coincidentes.



Fonte: Elaborado pelos autores.

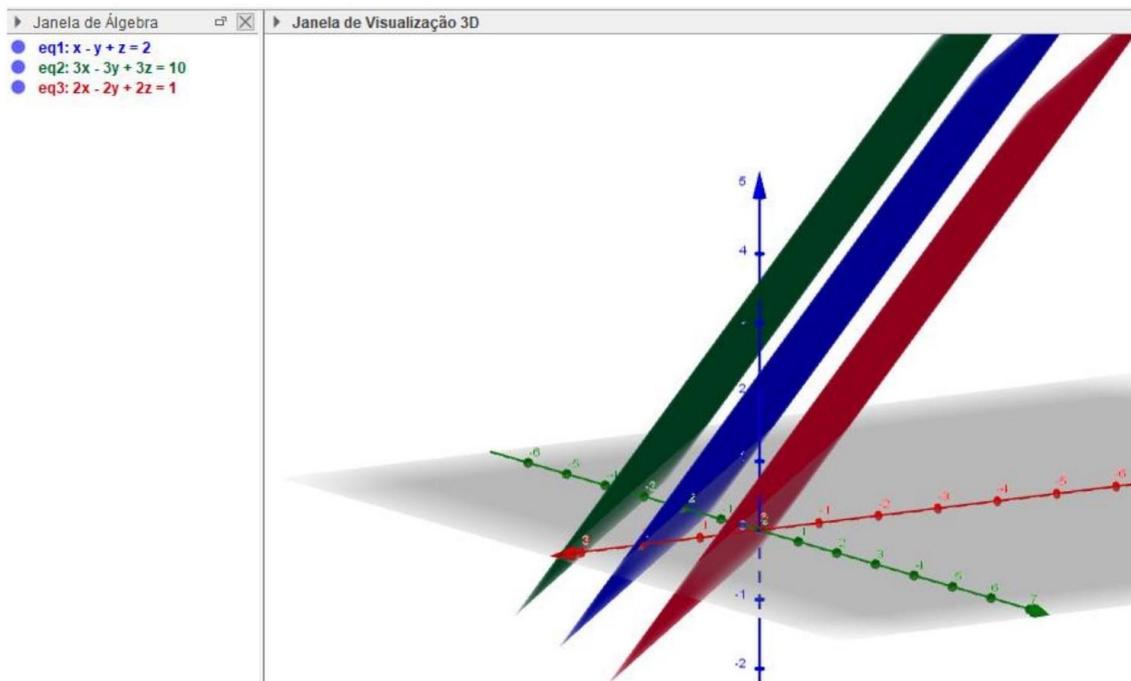
Cada um desses casos admite infinitas soluções. Quando o sistema é impossível, significa que não há intersecção entre os três planos. Portanto, graficamente, os três planos poderiam ser paralelos entre si, ou dois planos coincidentes e outro paralelo, ou dois planos

paralelos e um terceiro plano intercepta, gerando duas retas distintas, ou ainda os planos se interceptam dois a dois, gerando três retas distintas.

Apresentarei a representação do primeiro caso, por ser mais fácil a visualização caso sejam paralelos entre si:

$$\begin{cases} 3x - 3y + 3z = 6 \\ 3x - 3y + 3z = 10 \\ 6x - 6y + 6z = 3 \end{cases}$$

Figura 15 - Representação no GeoGebra sistema 3x3 impossível.



Fonte: Elaborado pelos autores.

3 CONCLUSÕES

Com este trabalho foi possível verificar que existem diversas formas de se resolver problemas lineares, desde que sejam modelados corretamente, e aprofundar-se em alguns métodos de resolução em específico, como o método da substituição, o da eliminação de Gauss e um método para resolver Equações Diofantinas com o auxílio do Algoritmo de Euclides. Percebemos com este artigo que a utilização do software GeoGebra facilitou a compreensão da classificação de problemas lineares e que a representação gráfica contribuiu para um melhor entendimento do que foi realizado algebricamente. Com isto, acreditamos que o objetivo de estudo de problemas lineares foi alcançado.

REFERÊNCIAS

CEVADA, J.; *et al.* **Matemática nos dias de hoje: algoritmos e álgebra**. 1. ed. São Paulo: SEI, 2020. p. 117-130.

CHIARI, Aparecida S.; FREITAS, José L. M. de. A devolução do problema: como resolver um sistema linear? **Anais do Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 5, n. 1, 2011.

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZE, Gelson. **Álgebra moderna**. 4. ed. rev. São Paulo: Atual, 2003. p. 296-2.

FREITAS, Carlos W. A. **Equações diofantinas**. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. **Introdução à pesquisa operacional**. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

KILHIAN, Kleber. **O algoritmo de Euclides para determinação do MDC**. Disponível em: <https://www.obaricentrodamente.com/2012/08/o-algoritmo-de-euclides-para.html>. Acesso em: 12 set. 2022.

OLIVEIRA, Raul R. de. **Sistemas lineares**. Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/sistemas-lineares.htm>. Acesso em: 13 jul. 2022.

SILVA, Welington F. da. **O uso da planilha do software GeoGebra como material de apoio para professores do ensino médio: uma instrumentalização no ensino de matrizes, determinantes e sistemas lineares**. 2021. 102 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade do Estado de Mato Grosso, 2021.



9 786553 812963

